Высшее профессиональное образование

Учебник

И. И. Баврин

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ

БАКАЛАВРИАТ

МАТЕМАТИКА

ACADEMA

Высшее профессиональное образование

БАКАЛАВРИАТ

И. И. БАВРИН

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ

УЧЕБНИК

Допущено
Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям гуманитарной подготовки
«Документоведение и архивоведение», «Туризм»
и «Социальная работа», квалификация «бакалавр»

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2011

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Б13

Рецензенты:
член-корреспондент РАО, доктор педагогических наук,
профессор Российской академии образования *П. И. Самойленко*;
кандидат физико-математических наук, доцент Московского института
радиотехники, электроники и автоматики *Т. А. Кузнецова*;
доктор педагогических наук, профессор Московского института радиотехники,
электроники и автоматики *С. А. Розанова*

Баврин И. И.
Б13 Математика для гуманитариев : учебник для студентов учреждений высш. проф. образования гуманитарных направлений / И.И.Баврин. — М. : Издательский центр «Академия», 2011. — 320 с. — (Сер. Бакалавриат).

ISBN 978-5-7695-7957-8

Учебник создан в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по направлению подготовки «Педагогическое образование» 050100 «Математика» для студентов высших учебных заведений, изучающих гуманитарные дисциплины, (квалификация «бакалавр»).

Учебник содержит изложение основ математики для студентов, специализирующихся в области гуманитарных наук, и упражнения ко всем излагаемым вопросам. Подробно рассмотрены разделы математики, относящиеся к математическому анализу, теории вероятностей и математической статистике, дискретной математике, сопровождаемые большим числом разобранных примеров и задач. Дан краткий исторический очерк зарождения и развития математики.

Для студентов учреждений высшего профессионального образования, обучающихся по гуманитарным направлениям.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7695-7957-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Роль математики в различных областях естествознания в разное время была неодинаковой. Она складывалась исторически, и существенное влияние на нее оказывали два фактора: уровень развития математического аппарата и степень зрелости знаний об изучаемом объекте, возможность описать его основные черты и свойства на языке математических понятий и соотношений, или, как теперь принято говорить, возможность построить «математическую модель» изучаемого объекта.

Приведем простейший пример математической модели. Представим себе, что требуется определить площадь пола комнаты. Для выполнения такого задания измеряют длину и ширину комнаты, а затем перемножают полученные числа. Эта элементарная процедура фактически означает следующее. Реальный объект — пол комнаты — заменяется абстрактной математической моделью — прямоугольником. Прямоугольнику приписывают размеры, полученные в результате измерения, и площадь такого прямоугольника приближенно принимают за искомую площадь.

Математическая модель, основанная на некотором упрощении, идеализации, никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту, не передает всех его свойств и особенностей, а является его приближенным отражением. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность математически сформулировать задачу его изучения и воспользоваться для анализа его свойств математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы данного объекта. Этот аппарат позволяет единообразно описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, т. е. прогнозировать результаты будущих наблюдений.

Математические модели давно и весьма успешно применяют в механике, физике, астрономии.

В современный период роль математических методов возрастает. Они теперь широко используются и в биологии, и в медицине, и в спорте. Идеями математики пронизаны и гуманитарные науки: экономика, социология, логика, философия, психология, педагогика (см. например, [1, 9, 14]).

Учебник содержит те разделы математики, которые в известной мере обеспечивают приложения в гуманитарной сфере. Это, прежде всего, математический анализ, теория вероятностей и математическая статистика и дискретная математика.

В учебнике много примеров, задач, рисунков, что делает изложение наглядным и показывает, какие задачи можно решать, используя ее теоретический материал. Учебник содержит и большое число упражнений ко всем главам, достаточное для ведения (групповых) практических занятий.

Для развития у студентов-гуманитариев математического мышления в учебнике многие вопросы изложены с полным доказательством, сложные доказательства опущены (есть ссылки на более полные учебники, приведенные в списке литературы).

Учебник состоит из 12 глав. Глава 1 посвящена аналитической геометрии, векторной и линейной алгебре, главы 2—7 посвящены математическому анализу, главы 8—10 — теории вероятностей и математической статистике, глава 11 — дискретной математике, глава 12 — краткой истории зарождения и развития математики.

Глава 1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Метод координат

1. Декартовы прямоугольные координаты. Выберем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy с указанными на них положительными направлениями. Прямые Ox и Oy называют ***координатными осями***, точку их пересечения O — ***началом координат***. Обычно полагают, что ось Ox горизонтальна, а ось Oy вертикальна относительно наблюдателя, положительное направление на Ox слева направо, на Oy — снизу вверх (рис. 1.1).

Возьмем теперь некоторую единицу масштаба, с помощью которой будут производиться все измерения на плоскости xOy.

Совокупность координатных осей Ox, Oy и выбранной единицы масштаба называют ***декартовой прямоугольной*** (или кратко ***прямоугольной***) ***системой координат*** на плоскости[1].

Произвольной точке M плоскости поставим в соответствие два числа (рис. 1.1):

а) ***абсциссу*** x, равную расстоянию точки M от оси Oy, взятому со знаком «+», если M лежит правее Oy, и со знаком «–», если M лежит левее Oy;

б) ***ординату*** y, равную расстоянию точки M от оси Ox, взятому со знаком «+», если M лежит выше Ox, и со знаком «–», если M лежит ниже Ox.

Абсциссу x и ординату y называют ***декартовыми прямоугольными*** (или кратко ***прямоугольными***) ***координатами*** точки M. Обозначение $M(x; y)$ означает: точка M с абсциссой, равной x, и ординатой, равной y.

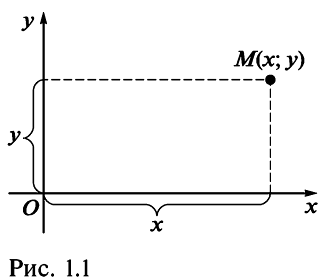


Рис. 1.1

Отметим, что *каждой точке плоскости соответствует одна пара действительных чисел x и y* (ее координат).

[1] Декартова прямоугольная система координат носит имя французского математика, основателя аналитической геометрии Рене Декарта (1596—1650).

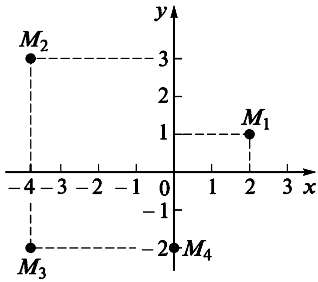


Рис. 1.2

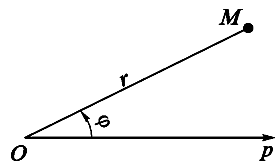


Рис. 1.3

Верно и обратное: *каждой паре действительных чисел x и y соответствует одна точка плоскости*. Это означает, что на плоскости положение произвольной точки M полностью определяется ее координатами x и y.

Координатные оси Ox и Oy разбивают плоскость на I, II, III и IV квадранты[1]. Знаки координат точек в различных квадрантах указаны в следующей таблице:

Координаты	Квадранты			
	I	II	III	IV
x	+	–	–	+
y	+	+	–	–

При этом если точка $M(x; y)$ лежит на оси Oy, то $x = 0$; если $M(x; y)$ лежит на оси Ox, то $y = 0$. На рис. 1.2 построены точки $M_1(2; 1)$, $M_2(-4; 3)$, $M_3(-4; -2)$ и $M_4(0; -2)$.

2. Полярные координаты. Зафиксируем на плоскости точку O и выходящую из нее полупрямую Op, а также выберем единицу масштаба. Точка O называется *полюсом*, полупрямая Op — *полярной осью* (рис. 1.3).

Произвольной точке M (отличной от O) плоскости поставим в соответствие два числа:

полярный радиус r, равный расстоянию точки M от полюса O, измеренному выбранной единицей масштаба;

полярный угол φ, равный углу между полярной осью Op и полупрямой OM.

Полярный угол φ измеряется в радианах, отсчет положительных (отрицательных) значений φ ведется от Op против движения (по движению) часовой стрелки. При этом обычно полагают, что $-\pi < \varphi \le \pi$.

[1] Иногда их также называют координатными углами.

Полюсу O соответствует полярный радиус $r = 0$, полярный угол для него не определен.

Запись $M(r; \varphi)$ означает: точка M с полярными координатами r и φ.

Будем считать начало координат O прямоугольной системы xOy одновременно полюсом O, а положительную часть оси Ox примем за полярную ось Op (рис. 1.4).

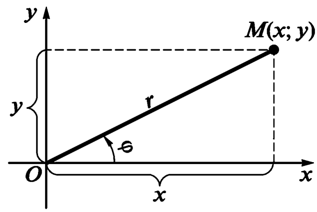


Рис. 1.4

На рис. 1.4 видно, что для точки M $(x; y)$ $(M$ $(r; \varphi))$ справедливы соотношения

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{1.1}$$

и

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{1.2}$$

Формулы (1.1) выражают прямоугольные координаты точки M через ее полярные координаты. Это можно доказать для любого расположения точки M на координатной плоскости. Формулы (1.2) выражают полярные координаты точки M через ее прямоугольные координаты и тоже верны при любом положении точки M.

Заметим, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ дает два значения φ, так как $-\pi < \varphi \le \pi$. Поэтому для вычисления полярного угла φ точки M по ее прямоугольным координатам x и y предварительно выясняют, в каком квадранте лежит точка M.

Пример 1.1. Даны прямоугольные координаты точки A: $x = 1$, $y = 1$. Найдем ее полярные координаты.

Решение. По формулам (1.2) находим $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$. Из двух значений $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ выбираем $\varphi = \frac{\pi}{4}$, так как точка A лежит в первом квадранте. Итак, полярные координаты данной точки: $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Пример 1.2. Полярные координаты точки A: $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Найдем прямоугольные координаты этой точки.

Решение. По формулам (1.1) прямоугольные координаты точки A будут равны:

$$x = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad y = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2.$$

3. Основные задачи, решаемые методом координат. ***Задача о расстоянии между двумя точками.*** Найдем расстояние d между двумя данными точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 1.5). Из прямоугольного треугольника M_1NM_2 по теореме Пифагора

$$d = M_1M_2 = \sqrt{M_1N^2 + M_2N^2}.$$

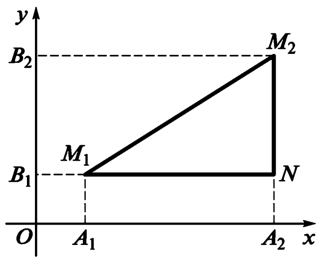


Рис. 1.5

Из курса геометрии известно, что расстояние d между точками A и B, расположенными на координатной прямой (оси), вычисляется по формуле $d = AB = |x_B - x_A|$, где x_A и x_B — координаты точек A и B этой прямой. Тогда $M_1N = A_1A_2 = |x_2 - x_1|$, $NM_2 = |y_2 - y_1|$. Поэтому

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1.3)$$

Пример 1.3. Найти расстояние между точками $A(-1; -2)$ и $B(-4; 2)$.

Решение. По формуле (1.3) имеем

$$AB = \sqrt{(-4+1)^2 + (2+2)^2} = 5.$$

Задача о делении отрезка в данном отношении. Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Требуется найти точку $M(x; y)$, лежащую на отрезке M_1M_2 и делящую его в данном отношении

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda. \qquad (1.4)$$

Опустим из точек M_1, M и M_2 перпендикуляры на ось Ox (рис. 1.6). По известному предложению из элементарной геометрии о пересечении сторон угла параллельными прямыми получим

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{A_1A}{AA_2}.$$

При выбранном расположении точек имеем

$$A_1A = x - x_1, \quad AA_2 = x_2 - x.$$

Следовательно, отношение (1.4) принимает вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda,$$

откуда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}. \qquad (1.5)$$

Аналогично

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (1.6)$$

В частности, если $\lambda = 1$, т.е. при делении отрезка M_1M_2 пополам, получаем

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

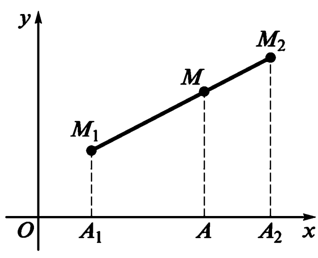


Рис. 1.6

П р и м е ч а н и е. Формулы (1.5) и (1.6) верны при любом расположении точек M_1 и M_2.

Пример 1.4. Вычислить координаты точки M (x; y), делящей отрезок M_1M_2 между точками $M_1(1;\ 1)$ и $M_2(4;\ 7)$ в отношении $\dfrac{M_1M}{MM_2}=2$.

Р е ш е н и е. Согласно формулам (1.5) и (1.6) имеем

$$x=\frac{1+2\cdot 4}{3}=3,\quad y=\frac{1+2\cdot 7}{3}=5.$$

4. Уравнение линии на плоскости. Прямоугольная и полярная системы координат позволяют задавать различные линии на плоскости их уравнениями.

Уравнением линии на плоскости в прямоугольной системе координат называется уравнение

$$f(x,y)=0$$

с переменными x и y, которому удовлетворяют координаты каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки плоскости, не лежащей на этой линии. Здесь f — функция двух переменных, сопоставляющая каждой паре x, y число $f(x,\ y)$ (см. подразд. 5.1, п. 1).

Переменные x и y уравнения линии называются *текущими координатами*.

Покажем, например, что уравнение $x-y=0$ или

$$x=y \qquad (1.7)$$

является уравнением биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

По свойству биссектрисы угла для произвольной точки $M(x;\ y)$ (лежащей на биссектрисе) $N_2M=N_1M$ или $ON_1=ON_2$ (рис. 1.7) и поэтому $x=y$, т.е. координаты всех точек биссектрисы удовлетворяют уравнению (1.7). Очевидно также, что у любой точки, не лежащей на данной биссектрисе, координаты не равны между собой и не удовлетворяют уравнению (1.7).

Отметим, что геометрическим образом данного заранее уравнения не всегда будет линия. Может случиться, что уравнению соответствует лишь несколько точек. Уравнению $x^2+y^2=0$, например, на плоскости соответствует только одна точка (0; 0). Встречаются и такие случаи, когда заданному уравнению не соответствует на плоскости ни одной точки (например, уравнению $x^2+y^2+1=0$).

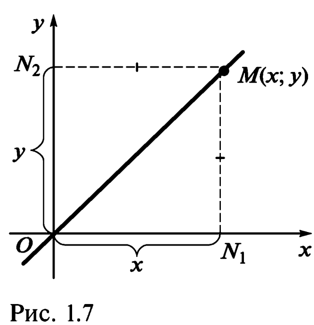


Рис. 1.7

Линия может определяться на плоскости не только уравнением, содержащим декартовы координаты, но и уравнением в полярных координатах.

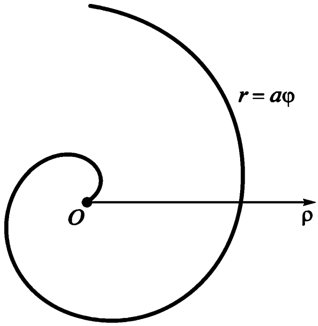


Рис. 1.8

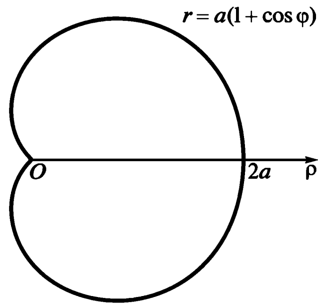


Рис. 1.9

Пример 1.5. Рассмотрим уравнение $r = a\varphi$, где a — положительное число, r и φ — полярные координаты.

Решение. Обозначим через M точку с полярными координатами $(r;\ \varphi)$. Если $\varphi = 0$, то и $r = 0$, если φ возрастает, начиная с нуля, то r будет возрастать пропорционально φ. Точка $M(r,\ \varphi)$, таким образом, исходя из полюса, движется вокруг него с ростом φ (в положительном направлении), одновременно удаляясь от него. Множество точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению $r = a\varphi$, называется *спиралью Архимеда* (рис. 1.8).

Пример 1.6. Кривая, задаваемая уравнением

$$r = a(1 + \cos\varphi)\ (a > 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi),$$

называется *кардиоидой*.

Решение. Составим таблицу значений φ и r:

φ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$
r	$2a$	$\approx 1{,}9a$	$\frac{3}{2}a$	a	$\frac{a}{2}$	$\approx 0{,}1a$	0

Построив точки кардиоиды по значениям φ и r из этой таблицы, можно составить приближенное представление о форме этой кривой (рис. 1.9).

1.2. Прямая линия

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Пусть прямая l не параллельна оси Oy (рис. 1.10). Обозначим точку пересечения l с осью Oy через $B(0;\ b)$, а угол между положительным направлением оси Ox и l через φ. Угол φ, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки $(0 \le \varphi < \pi)$, называется *углом наклона* прямой l к оси Ox.

Выведем уравнение прямой l.

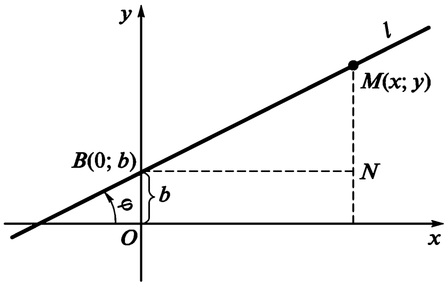


Рис. 1.10

Пусть $M(x;\,y)$ — произвольная точка прямой l с текущими координатами x и y, причем $x \neq 0$. Из прямоугольного треугольника BNM (рис. 1.10) имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-b}{x}. \tag{1.8}$$

Эту величину называют угловым коэффициентом прямой и обозначают через k: $k = \operatorname{tg}\varphi$. Тогда из (1.8) получаем

$$k = \frac{y-b}{x},$$

откуда

$$y = kx + b. \tag{1.9}$$

Заметим, что, если координата x точки M равна нулю, то $y = b$, т.е. уравнение (1.9) выполнено и в этом случае.

Уравнение (1.9) называется *уравнением прямой* с *угловым коэффициентом*; число b называется *начальной ординатой* (это ордината точки B).

Пример 1.7. Если $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $b = -3$, то $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, и уравнение данной прямой имеет вид $y = x - 3$.

Если в уравнении (1.9) $k = 0$, то имеем уравнение прямой

$$y = b, \tag{1.10}$$

параллельной оси Ox и проходящей через точку $B(0;\,b)$. При $b = 0$ из (1.10) получаем уравнение координатной оси Ox: $y = 0$.

По аналогии с уравнением (1.10) уравнение

$$x = a \tag{1.11}$$

есть уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $(a;\,0)$. При $a = 0$ из (1.11) имеем уравнение координатной оси Oy: $x = 0$.

2. Общее уравнение прямой. Уравнением с угловым коэффициентом может быть задана любая прямая на плоскости, не параллельная оси ординат. При рассмотрении уравнения первой степени

$$Ax + By + C = 0, \tag{1.12}$$

в котором коэффициенты A и B одновременно не равны нулю, оказывается, что любую прямую без каких-либо ограничений можно задать уравнением (1.12).

> ***Теорема 1.1.*** *Каждая прямая на плоскости с прямоугольной декартовой системой координат определяется уравнением первой степени, и наоборот: каждое уравнение первой степени определяет некоторую прямую на плоскости.*

Доказательство. 1. Пусть дана прямая, не параллельная оси ординат. В этом случае прямая описывается уравнением с угловым коэффициентом $y = kx + b$, которое является частным случаем уравнения (1.12) при $A = k$, $B = -1$, $C = b$.

Пусть теперь прямая параллельна оси Oy. Тогда ее уравнение запишется в виде $x = a$. Это уравнение тоже частный случай уравнения (1.12) при $A = 1$, $B = 0$, $C = -a$. Итак, любая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени.

2. Покажем теперь, что произвольному уравнению первой степени (1.12) (A и B одновременно не равны нулю) соответствует некоторая прямая на плоскости.

Действительно, если $B \neq 0$, то уравнение (1.12) можно преобразовать в уравнение

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

т.е. в уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -\frac{A}{B}$ и начальной ординатой $b = -\frac{C}{B}$. Если $B = 0$, то $A \neq 0$ и уравнение (1.12) преобразуется к виду $x = -\frac{C}{A}$, т.е. в уравнение прямой, параллельной оси Oy. Теорема доказана.

Уравнение первой степени (1.12) (A и B одновременно не равны нулю), описывающее на плоскости любую прямую, называется ***общим уравнением прямой.***

3. Уравнение прямой с данным угловым коэффициентом и проходящей через данную точку. Выведем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1; y_1)$ и имеющей данный угловой коэффициент k. Уравнение этой прямой имеет вид

$$y = kx + b. \tag{1.13}$$

Так как искомая прямая проходит через точку M_1, то

$$y_1 = kx_1 + b. \tag{1.14}$$

Вычитая из равенства (1.13) равенство (1.14), получаем

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{1.15}$$

Это и есть уравнение искомой прямой.

Пример 1.8. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\ 8)$, с угловым коэффициентом $k = 1$ согласно (1.15) есть $y - 8 = x + 1$, или $x - y + 9 = 0$.

4. Уравнение прямой в отрезках. Предположим, что в общем уравнении прямой $A \neq 0$, $B \neq 0$ и $C \neq 0$. Перенеся в нем C в правую часть и разделив обе части полученного уравнения на $-C$, получим

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$$

или

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Отсюда, вводя обозначения $-\frac{C}{A} = a$, $-\frac{C}{B} = b$, приходим к уравнению

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{1.16}$$

Уравнение (1.16) называется ***уравнением прямой в отрезках***. Это название объясняется тем, что числа a и b определяются отрезками OA и OB, которые прямая отсекает на осях координат (рис. 1.11). Такой вид уравнения удобен для построения прямой.

Заметим, что прямые, параллельные координатным осям, и прямые, проходящие через начало координат, не могут быть записаны уравнениями в отрезках.

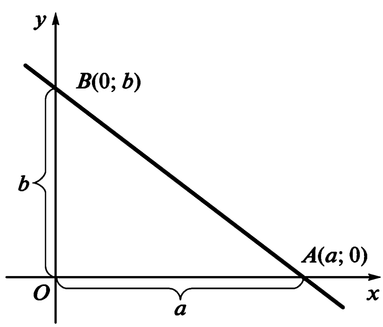


Рис. 1.11

Пример 1.9. Необходимо записать уравнение прямой $2x + 5y - 10 = 0$ в отрезках и построить эту прямую.

Р е ш е н и е. Перепишем данное уравнение в виде $2x + 5y = 10$, откуда $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ и, значит, $a = 5$, $b = 2$.

Отложим на осях координат отрезки $a = 5$, $b = 2$ и через их концы (5; 0) и (0; 2) проведем прямую.

5. Угол между двумя прямыми. Рассмотрим на плоскости две прямые $l_1 (y = k_1x + b_1)$ и $l_2 (y = k_2x + b_2)$ с углами наклона к оси Ox соответственно φ_1 и φ_2 (рис. 1.12).

Углом между прямыми l_1 и l_2 будем называть угол $(\widehat{l_1, l_2}) = \varphi$ — наименьший угол, на который надо повернуть первую прямую l_1 вокруг точки пересечения M против часовой стрелки до совпадения ее со второй прямой l_2 $(0 \le \varphi < \pi)$.

На рис. 1.12 видно, что $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1}$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (1.17)$$

Формула (1.17) дает выражение тангенса угла между двумя прямыми через угловые коэффициенты этих прямых.

Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то $\varphi_1 = \varphi_2$ и, следовательно, $k_1 = k_2$, т.е. ***параллельные прямые имеют равные угловые коэффициенты***.

Пусть $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е. l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны. В этом случае $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, откуда $\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}$ или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, т.е. ***угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.***

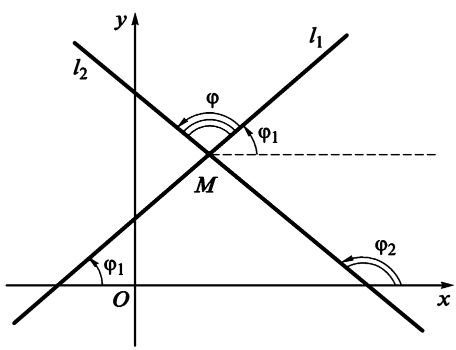


Рис. 1.12

Пример 1.10. Найдем две прямые, проходящие через начало координат, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна к прямой $y = 2x - 3$.

Р е ш е н и е. Так как искомые прямые проходят через точку (0; 0), то их уравнения имеют вид $y = k_1x$ и $y = k_2x$. Для данной прямой $k = 2$, и отсюда, на основании условий параллельности и перпендикулярности прямых, получаем: $k_1 = 2$ и $k_2 = -\frac{1}{2}$. Поэтому искомые прямые запишутся уравнениями: $y = 2x$ и $y = -\frac{1}{2}x$.

6. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Если две прямые l_1 и l_2 лежат на плоскости, то возможны три различных случая их взаимного расположения: 1) пересекаются (т.е. имеют одну общую точку); 2) параллельны и не совпадают; 3) совпадают. Выясним, как узнать, какой из этих случаев имеет место, если эти прямые заданы своими уравнениями в общем виде:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{1.18}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \tag{1.19}$$

Если прямые l_1 и l_2 пересекаются в некоторой точке $M(x; y)$, то координаты этой точки должны удовлетворять обоим уравнениям (1.18) и (1.19). Следовательно, чтобы найти координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2, надо решить систему уравнений (1.18), (1.19).

Умножая одно из них (уравнение (1.18)) на A_2, а другое на A_1 и затем вычитая полученные равенства, будем иметь

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y + C_2A_1 - C_1A_2 = 0. \tag{1.20}$$

Аналогично получаем

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x + C_1B_2 - C_2B_1 = 0. \tag{1.21}$$

Если $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, то из (1.20) и (1.21) получаем решение системы уравнений (1.18) и (1.19):

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}. \tag{1.22}$$

Это и есть координаты x и y точки пересечения прямых l_1 и l_2. Итак, если $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, то эти прямые пересекаются.

Если

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0, \tag{1.23}$$

то выражения для x и y не имеют смысла. В этом случае прямые l_1 и l_2 параллельны. Действительно, из условия (1.23) следует, что $-\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$, т.е. $k_1 = k_2$ (если же $B_1 = B_2 = 0$, то прямые l_1 и l_2 параллельны оси Oy и, следовательно, параллельны между собой).

Условие (1.23) можно записать в виде

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \tag{1.24}$$

Здесь один из знаменателей может оказаться равным нулю. Чтобы обойти эту трудность, договоримся всякую пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ понимать в смысле равенства $ad = bc$. Тогда обращение в нуль одного из знаменателей в условии (1.24) означает обращение в нуль и соответствующего числителя. В самом деле, если, например, $A_2 = 0$, то, поскольку $B_2 \neq 0$ (A_2 и B_2 не нули одновременно), из равенства $A_1 B_2 = A_2 B_1$ замечаем, что $A_1 = 0$.

В частности, параллельные прямые могут совпадать. Выясним, каков аналитический признак совпадения прямых l_1 и l_2.

Пусть

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{1.25}$$

Полагая каждое из этих отношений равным q, находим, что

$$A_1 = A_2 q,\ B_1 = B_2 q,\ C_1 = C_2 q.$$

Таким образом, уравнение (1.18) получается из уравнения (1.19) умножением всех его членов на некоторое число q, т. е. уравнения (1.18) и (1.19) равносильны. Следовательно, рассматриваемые параллельные прямые совпадают.

Если при выполнении условия (1.24) хотя бы один из свободных членов уравнений (1.20) и (1.21) будет отличен от нуля (или $C_2 A_1 - C_1 A_2 \neq 0$, или $C_1 B_2 - C_2 B_1 \neq 0$), что кратко записывают

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \tag{1.26}$$

то система уравнений (1.20) и (1.21), а значит, и уравнений (1.18) и (1.19) не будет иметь решений (по крайней мере одно из равенств (1.20) или (1.21) будет невозможным). В этом случае параллельные прямые l_1 и l_2 не будут совпадать.

Итак, ***условием совпадения двух прямых является пропорциональность соответствующих коэффициентов их уравнений***.

Допустим, что ни одна из прямых l_1 и l_2 не параллельна оси Oy. Тогда их уравнения можно записать в виде

$$y = k_1 x + b_1,\ y = k_2 x + b_2,$$

где

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1},\ k_2 = -\frac{A_2}{B_2}. \tag{1.27}$$

Условие перпендикулярности таких прямых следует из равенств (1.17), (1.27) и имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (1.28)$$

Хотя соотношение (1.28) получено в предположении, что ни одна из прямых l_1 и l_2 не параллельна оси Oy, оно остается верным, если это условие нарушается.

Пример 1.11. Прямые $3x + 4y - 1 = 0$ и $2x + 3y - 1 = 0$ пересекаются, так как $3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \neq 0$. Координаты точки пересечения согласно (1.22) $x = -1$, $y = 1$.

Пример 1.12. Прямые $2x - y + 2 = 0$ и $4x - 2y - 1 = 0$ параллельны (они не имеют общей точки), так как выполнено условие (1.26).

Пример 1.13. Прямые $x + y + 1 = 0$ и $3x + 3y + 3 = 0$ совпадают, так как выполнено условие (1.25).

Пример 1.14. Прямые $3x - 4y + 8 = 0$ и $4x + 3y - 9 = 0$ взаимно перпендикулярны, так как выполнено условие (1.28).

7. Расстояние от точки до прямой. Решим следующую задачу: найти расстояние d от точки $M_0(x_0;\, y_0)$ до прямой l ($Ax + By + C = 0$). (Под расстоянием d от точки $M_0(x_0;\, y_0)$ до прямой l понимается длина перпендикуляра, опущенного из M_0 на l.)

Предположим, что прямая l не параллельна ни одной из координатных осей Ox и Oy. Так как угловой коэффициент прямой l есть $-\frac{A}{B}$, то уравнение перпендикуляра к прямой l, проходящего через точку $M_0(x_0;\, y_0)$ (рис. 1.13), запишется в виде

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0)$$

или

$$B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0.$$

Пусть $M_1(x_1;\, y_1)$ — точка пересечения перпендикуляра с прямой l. Тогда $Ax_1 + By_1 + C = 0$, $B(x_1 - x_0) - A(y_1 - y_0) = 0$ и

$$d = M_0M_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}. \qquad (1.29)$$

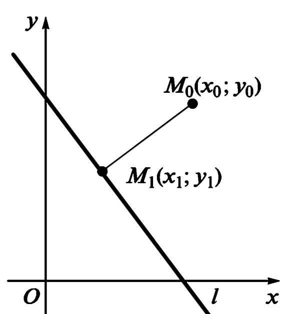


Рис. 1.13

Найдем значения $x_1 - x_0$ и $y_1 - y_0$.

Для этого, переписав равенство $Ax_1 + By_1 + C = 0$ в виде $A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0$, решим систему уравнений

$$\begin{cases} A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0, \\ B(x_1 - x_0) - A(y_1 - y_0) = 0 \end{cases}$$

относительно $x_1 - x_0$ и $y_1 - y_0$.

Имеем

$$x_1 - x_0 = \frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C), \tag{1.30}$$

$$y_1 - y_0 = \frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C). \tag{1.31}$$

Из (1.29), (1.30) и (1.31) получаем

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{1.32}$$

Можно показать, что формула (1.32) верна и в тех случаях, когда прямая l параллельна одной из координатных осей.

Пример 1.15. Найдем расстояние от точки $M_0(-6; 3)$ до прямой $3x - 4y + 15 = 0$. По формуле (1.32) получаем

$$d = \frac{|3 \cdot (-6) - 4 \cdot 3 + 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} \quad 3.=$$

1.3. Основные задачи на прямую

1. Составление уравнения произвольной прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$. Пусть уравнение искомой прямой

$$Ax + By + C = 0. \tag{1.33}$$

Значит, M_1 лежит на этой прямой, поэтому

$$Ax_1 + By_1 + C = 0. \tag{1.34}$$

Вычитая из (1.33) почленно (1.34), получаем

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \tag{1.35}$$

Очевидно, при любых A и B уравнению (1.35) удовлетворяют координаты точки M_1.

2. Составление уравнения прямой, проходящей через две данные (различные) точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$, имеет вид (1.35). Так как прямая проходит и через точку M_2, то

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0,$$

откуда

$$-\frac{A}{B} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{1.36}$$

С учетом равенства (1.35) искомое уравнение запишем в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{1.37}$$

П р и м е ч а н и я. 1. Заметим, что в уравнении (1.37) один из знаменателей $x_2 - x_1$ или $y_2 - y_1$ может оказаться равным нулю (оба числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ равняться нулю не могут, ибо точки M_1 и M_2 различные). Так как всякую пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ мы условились (см. 1.2, п. 6) понимать как равенство $ad = bc$, то обращение в нуль одного из знаменателей в равенстве (1.37) означает обращение в нуль и соответствующего числителя. Если, например, $y_2 - y_1 = 0$, то $y = y_1$.

2. Формула (1.36) определяет угловой коэффициент прямой, проходящей через точки M_1 и M_2.

Пример 1.16. Необходимо написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(4; -2)$ и $M_2(3; -1)$.

Р е ш е н и е. На основании уравнения (1.37) имеем

$$\frac{x-4}{3-4} = \frac{y+2}{-1+2}, \text{ или } x + y - 2 = 0.$$

1.4. Кривые второго порядка

Кривыми второго порядка называются линии, уравнения которых могут быть записаны следующим образом:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где A, B, C, D, E и F — некоторые действительные числа, называемые коэффициентами уравнения, причем по крайней мере один из коэффициентов A, B или C отличен от нуля.

К числу линий второго порядка относятся *окружность*, *эллипс*, *гипербола* и *парабола*. Они играют большую роль в математике, естествознании и технике.

1. Уравнение окружности. Как известно, ***окружностью*** называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности. Выведем уравнение окружности.

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ — центр окружности, R — ее радиус, а $M(x; y)$ — произвольная точка окружности с текущими координатами x и y (рис. 1.14).

По определению окружности $M_0M = R$. Отсюда согласно формуле расстояния между двумя точками $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R$, или

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2. \qquad (1.38)$$

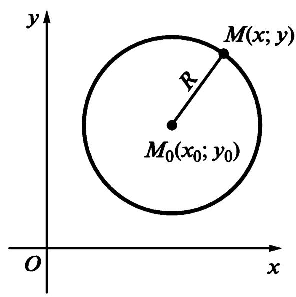


Рис. 1.14

Формула (1.38) представляет собой *каноническое* (т. е. простейшее) уравнение окружности. Если центр окружности совпадает с началом координат, то ее уравнение принимает вид

$$x^2+y^2=R^2. \tag{1.38'}$$

Пример 1.17. Напишем уравнение окружности радиуса $R = 3$ с центром в точке $C(1; 2)$.

Решение. Согласно формуле (1.38) имеем

$$(x-1)^2+(y-2)^2=9.$$

В полярных координатах $(r; \varphi)$ окружность радиуса R с центром в полюсе изображается уравнением $r = R$.

В тех же координатах $(r; \varphi)$ окружность радиуса R с центром в точке $(R; 0)$ имеет уравнение $r = 2R\cos\varphi$.

Иногда бывает удобно вместо уравнения линии, связывающего прямоугольные координаты x и y, рассматривать так называемые ***параметрические уравнения линии***, дающие выражения текущих координат x и y в виде функций от некоторой переменной величины t (параметра). Параметрические уравнения играют важную роль, например, в механике, где координаты x и y движущейся точки $M(x; y)$ рассматриваются как функции времени (*уравнения движения*).

Пример 1.18. Установим параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат.

Решение. Пусть $M(x; y)$ — любая точка этой окружности, а t — угол AOM (рис. 1.15). Очевидно,

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t.$$

Это и есть параметрические уравнения окружности. Параметр t может принимать любые значения, но, для того чтобы точка $M(x; y)$ один раз обошла окружность, следует ограничить изменение параметра t неравенством $0 \le t < 2\pi$. Заметим, что для исключения параметра t из этих уравнений достаточно возвести эти уравнения в квадрат и сложить их; мы получим при этом уравнение (1.38′).

2. Каноническое уравнение эллипса. ***Эллипсом*** называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами эллипса*) есть величина постоянная, равная $2a$.

Выведем каноническое уравнение эллипса. Для этого выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ее ось Ox проходила через фокусы F_1 и F_2 (расстояние между фокусами обозначим $2c$), а начало координат находилось в середине отрезка F_1F_2 (рис. 1.16). Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка эллипса. Согласно определению эллипса имеем

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

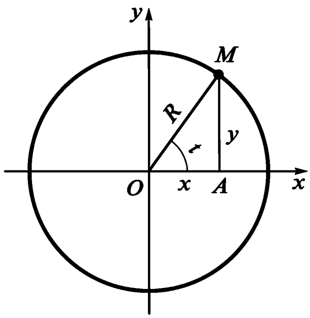


Рис. 1.15

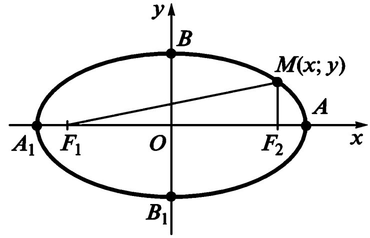


Рис. 1.16

или, по формуле расстояния между двумя точками,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Это и есть уравнение эллипса. Приведем его к каноническому виду. Перенося один из радикалов вправо, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возведем теперь обе части последнего равенства в квадрат:

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2,$$

откуда

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx. \qquad (1.39)$$

Возведем в квадрат обе части равенства (1.39):

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

откуда

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Заметим, что $a^2 - c^2 > 0$, так как $2a > 2c$ или $a > c$ (сумма двух сторон треугольника больше третьей его стороны). Поэтому, обозначив $a^2 - c^2$ через b^2, получаем

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Деля обе части последнего равенства на a^2b^2, окончательно получаем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1.40)$$

Формула (1.40) и есть каноническое уравнение эллипса.

Эллипс, отвечающий уравнению (1.40), изображен на рис. 1.16. Так как уравнение (1.40) содержит текущие координаты x и y только в четных степенях, то при замене x на $-x$, а y на $-y$ это уравнение не изменяется, т. е. эллипс симметричен относительно обеих осей координат. Из уравнения (1.40) при $y = 0$ получаем $x = \pm a$, т. е. эллипс пересекает ось Ox в двух точках $A(a;\ 0)$ и $A_1(-a;\ 0)$; при $x = 0$ получаем $y = \pm b$, т. е. эллипс пересекает ось Oy в двух точках $B(0;\ b)$ и $B_1(0;\ -b)$. Эти четыре точки называются ***вершинами*** эллипса. Отрезок A_1A называется ***большой осью*** эллипса, а отрезок B_1B — его ***малой осью***. Следовательно, a — длина большой полуоси эллипса, b — длина его малой полуоси.

В частном случае, когда $a = b$, уравнение (1.40) принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$ и определяет окружность с центром в начале координат. В этом случае $c = 0$.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к длине его большой оси, т. е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}. \tag{1.41}$$

Так как $c < a$, то для любого эллипса будет $0 \le \varepsilon < 1$ (случай $\varepsilon = 0$ соответствует окружности). Эксцентриситет характеризует степень сжатия эллипса. Действительно, из (1.41) и того, что $b^2 = a^2 - c^2$, следует

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

и, значит,

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Отсюда видно, что чем больше ε, тем меньше отношение $\frac{b}{a}$ и тем больше вытянут эллипс.

Задание полуосей a и b или эксцентриситета ε и расстояния между фокусами $2c$ определяет эллипс с центром в начале координат с точностью до поворота на произвольный угол.

Пример 1.19. Найдем значения параметров a, b, c и ε эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 4$.

Р е ш е н и е. Для нахождения указанных параметров приведем заданное уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$. Отсюда следует, что $a = 8$, $b = 6$,

$$c = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7},\quad \varepsilon = \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

3. Каноническое уравнение гиперболы. ***Гиперболой*** называется множество всех точек плоскости, разность расстояний каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами гиперболы*) есть величина постоянная, равная $2a$. Обозначим через $2c$ расстояние между фокусами F_1 и F_2 (рис. 1.17).

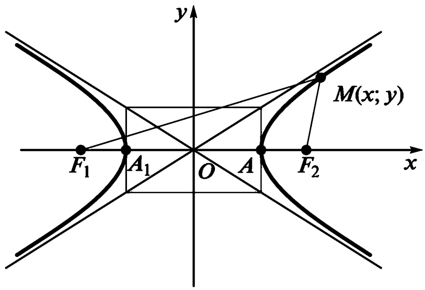


Рис. 1.17

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка гиперболы. Тогда по определению $MF_1 - MF_2 = 2a$ или $MF_2 - MF_1 = -2a$. Эти условия, определяющие гиперболу, можно записать в виде

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a.$$

Заметим, что $a < c$, так как $2a < 2c$, что следует из определения гиперболы.

Далее вывод канонического уравнения гиперболы проводится аналогично выводу канонического уравнения эллипса. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.42}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Гипербола, отвечающая уравнению (1.42), изображена на рис. 1.17. Подобно эллипсу гипербола симметрична относительно обеих осей координат. Она состоит из двух частей, которые называются ее ***ветвями***. Из уравнения (1.42) при $y = 0$ получаем $x = \pm a$, т. е. гипербола пересекает ось Ox в двух точках $A(a; 0)$ и $A_1(-a_1; 0)$, называемых вершинами гиперболы, отрезок A_1A называется ***вещественной осью гиперболы***.

Прямые

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

называются ***асимптотами гиперболы***. При увеличении x по абсолютной величине ветви гиперболы все ближе прилегают к своим асимптотам. Для построения асимптот гиперболы целесообразно предварительно построить прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям, и с центром в начале координат (такой прямоугольник называется ***основным прямоугольником гиперболы***).

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Так как $a < c$, то для любой гиперболы $\varepsilon > 1$. Учитывая, что $b^2 = c^2 - a^2$, имеем

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} \quad \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

и, значит,

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 \quad 1}. \ -$$

Отсюда видно, что чем меньше эксцентриситет гиперболы, т.е. чем ближе он к единице, тем больше вытянут основной прямоугольник по оси Ox.

Если у гиперболы (1.42) $a = b$, то она называется *равносторонней* (или *равнобочной*) и ее уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{1.43}$$

Асимптотами для равносторонней гиперболы (1.43) служат взаимно перпендикулярные прямые $y = \pm x$. Поэтому их можно принять за оси прямоугольной системы координат (OX — за ось абсцисс; OY — за ось ординат) и рассматривать эту равностороннюю гиперболу по отношению к этим новым осям. Взяв на указанной гиперболе произвольную точку $M(x; y)$ (рис. 1.18), выразим новые координаты X и Y точки M через старые x и y. На рис. 1.18 видно, что

$$X = X_B \quad x_C \cos\frac{\pi}{4} - (x_A \quad y)\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x \quad y), \tag{1.44}$$

$$Y = Y_D \quad x_E \cos\frac{\pi}{4} \quad (x_A = y)\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(x \quad y). \tag{1.45}$$

Перемножив равенства (1.44) и (1.45) и приняв во внимание равенство (1.43), получим

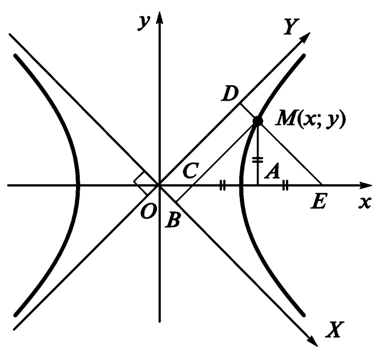


Рис. 1.18

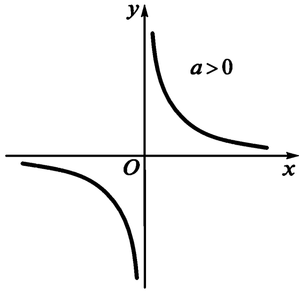


Рис. 1.19

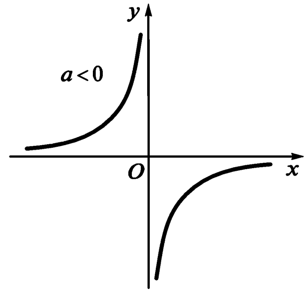


Рис. 1.20

$$XY = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}a^2$$

или, полагая для краткости $\frac{a^2}{2} = m$, $XY = m$.

Следовательно, уравнению $xy = a$, где $a > 0$, соответствует равносторонняя гипербола, имеющая своими асимптотами оси координат и лежащая в I и III квадрантах (рис. 1.19). При $a < 0$ эта гипербола лежит во II и IV квадрантах (рис. 1.20).

Пример 1.20. Найдем значения (a, b, c, ε) гиперболы, заданной уравнением $x^2 - 4y^2 = 36$.

Решение. Для этого приведем данное уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$. Отсюда следует, что $a = 6$; $b = 3$; $c = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ и $\varepsilon = \frac{3\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Уравнение асимптот гиперболы $y = \pm\frac{1}{2}x$.

4. Каноническое уравнение параболы. ***Параболой*** называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки F (называемой ***фокусом параболы***) и от данной прямой L (называемой ***директрисой параболы***).

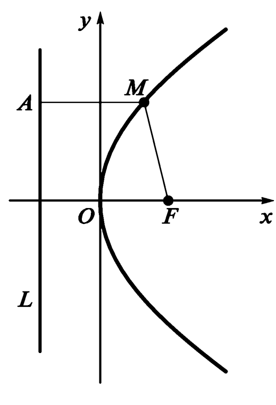


Рис. 1.21

Для вывода канонического уравнения параболы проведем ось Ox прямоугольной системы координат через фокус F перпендикулярно к директрисе, начало координат O поместим на равных расстояниях от фокуса и директрисы (рис. 1.21). Расстояние от фокуса до директрисы обозначим через p (оно называется ***параметром параболы***). В этом случае фокус будет иметь координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а уравнение директрисы будет $x = -\frac{p}{2}$.

Возьмем произвольную точку $M(x;\, y)$ параболы. Согласно определению параболы имеем

$$MF = MA$$

(точка A имеет координаты $\left(-\frac{p}{2}; y\right)$) или по формуле расстояния между двумя точками

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Отсюда

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

или

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

и окончательно

$$y^2 = 2px. \qquad (1.46)$$

Формула (1.46) и есть каноническое уравнение параболы. Парабола, отвечающая уравнению (1.46), показана на рис. 1.21.

Уравнение (1.46) имеет смысл только для неотрицательных значений x, т.е. все точки параболы лежат в I и IV квадрантах. Так как уравнение (1.46) содержит y^2, то парабола симметрична относительно оси Ox. ***Вершиной параболы*** называется точка пересечения параболы с ее осью симметрии (см. рис. 1.21). При возрастании x значения y возрастают по абсолютной величине. В отличие от гиперболы па-

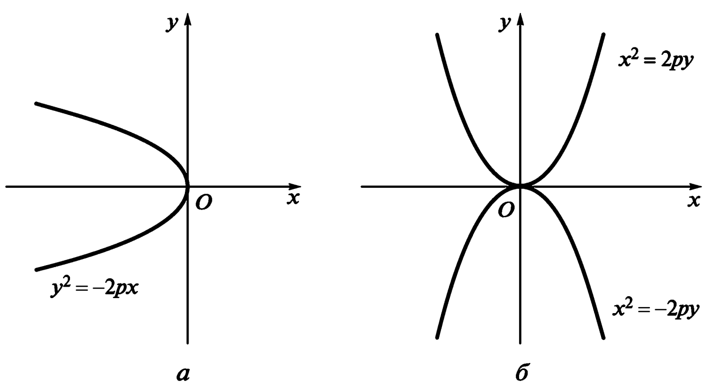


Рис. 1.22

рабола не имеет асимптот. Ось симметрии параболы называется ***осью параболы***.

Парабола, определяемая уравнением (1.46), имеет ось, совпадающую с осью Ox.

Примечание. Очевидно, что каждому из уравнений $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ соответствует парабола, по форме тождественная с параболой (1.46), но иначе расположенная. На рис. 1.22 изображены общие виды этих парабол при $p > 0$.

К параболам, например, симметричным относительно оси Oy, относятся также кривые, заданные уравнениями (рис. 1.23).

$$x^2 = 2p(y - c)\ (p > 0, c > 0),$$

$$x^2 = 2p(y + c)\ (p < 0, c > 0).$$

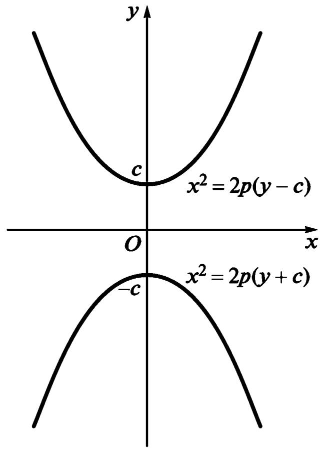


Рис. 1.23

Пример 1.21. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(9;\ 3)$ и симметрична относительно оси Ox. Напишем ее каноническое уравнение.

Решение. Подставляя координаты точки A в уравнение (1.46), находим, что $p = \frac{1}{2}$. Значит, уравнение искомой параболы $y^2 = x$.

1.5. Элементы векторной и линейной алгебры

1. Понятие вектора. ***Вектором*** называется направленный отрезок, имеющий определенную длину, т. е. отрезок определенной длины, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая — за конец. Если A — начало вектора и B — его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ (или $\overline{AB}$).

Обычно векторы обозначают одной малой латинской буквой со стрелкой (или с чертой) либо выделяют жирным шрифтом: $\vec{a}$, $\bar{a}$, **a**. Вектор изображается отрезком со стрелкой на конце (рис. 1.24).

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ называется его абсолютной величиной или *модулем* и обозначается символом $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, модуль которого равен 1, называется *единичным* и часто обозначается $\vec{e}$.

Вектор называется *нулевым* (обозначается $\vec{0}$ или **0**), если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

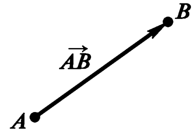


Рис. 1.24

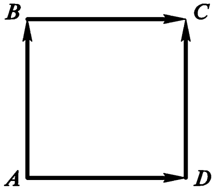


Рис. 1.25

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление. В этом случае пишут $\vec{a} = \vec{b}$. Все нулевые векторы считаются равными.

Из определения равенства векторов непосредственно следует, что, каковы бы ни были вектор $\vec{a}$ и точка P, существует, и притом единственный, вектор $\overrightarrow{PQ}$ с началом в точке P, равный вектору $\vec{a}$. В самом деле, существует лишь одна прямая, проходящая через точку P и параллельная той прямой, на которой лежит вектор $\vec{a}$. На указанной прямой существует единственная точка Q такая, что отрезок PQ имеет длину, равную длине вектора $\vec{a}$, и направлен в ту же сторону, что и вектор a. Таким образом, вектор можно переносить параллельно самому себе, помещая его начало в любую точку плоскости.

Пример 1.22. Рассмотрим квадрат $ABCD$ (рис. 1.25). На основании определения равенства векторов можно записать $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, но $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{DC}$, хотя $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$ $|\overrightarrow{BC}\ddagger$ $|\overrightarrow{DC}|$. =

Какой вид имеет четырехугольник $ABCD$, если известно, что $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$?

Решение. Из равенства $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ следует, что стороны AD и BC в заданном четырехугольнике равны и параллельны, значит этот четырехугольник — параллелограмм.

Два коллинеарных вектора (отличные от нулевых векторов), имеющие равные модули, но противоположно направленные, называются *противоположными*. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$. Для вектора $\overrightarrow{AB}$ противоположным является вектор $\overrightarrow{BA}$.

2. Сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора (рис. 1.26, *а*). Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Затем от точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

Вектор $\overrightarrow{OB}$, соединяющий начало первого слагаемого вектора с концом второго (рис. 1.26, *б*), называется *суммой* этих векторов и обозначается $\vec{a} = \vec{b}$ (правило треугольника).

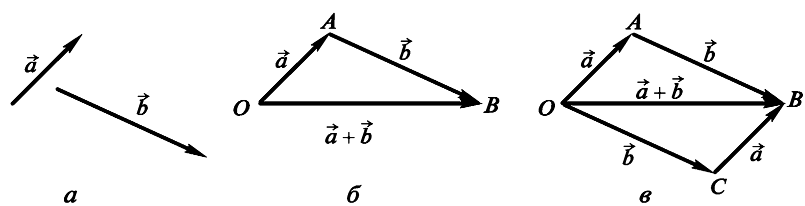


Рис. 1.26

Ту же самую сумму векторов можно получить иным способом. Отложим от точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec a$ и $\overrightarrow{OC}=\vec b$ (рис. 26, *в*). Построим на этих векторах как на сторонах параллелограмм $OABC$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, служащий диагональю этого параллелограмма, проведенной из вершины O, является, очевидно, суммой векторов $\vec a+\vec b$ (правило параллелограмма). Из рис. 1.26, *в* непосредственно следует, что сумма двух векторов обладает переместительным свойством:

$$\vec a+\vec b=\vec b+\vec a. \tag{1.47}$$

Действительно, каждый из векторов $\vec a+\vec b$ и $\vec b+\vec a$ равен одному и тому же вектору $\overrightarrow{OB}$.

Пример 1.23. В треугольнике ABC $AB=3$; $BC=4$; $\angle B=90°$. Найдем $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$; $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$.

Р е ш е н и е. Имеем: $|\overrightarrow{AB}|=AB$; $|\overrightarrow{BC}|=BC$ и, значит, $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|=7$.

Так как $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, то $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|=AC$.

Теперь, применяя теорему Пифагора, находим

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{9+16}=5,$$

т.е. $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=5$.

Понятие суммы векторов можно обобщить на случай любого конечного числа слагаемых векторов.

Пусть, например, даны три вектора $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$ (рис. 1.27). Построив сначала сумму векторов $\vec a+\vec b$, а затем прибавив к этой сумме вектор $\vec c$, получим вектор $(\vec a+\vec b)+\vec c$. На рис. 1.27

$$\overrightarrow{OA}=\vec a,\ \overrightarrow{AB}=b,\ \overrightarrow{OB}=\vec a+\vec b,\ \overrightarrow{BC}=\vec c$$

и

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(\vec a+\vec b)+\vec c.$$

На рис. 1.27 видно, что тот же вектор $\overrightarrow{OC}$ мы получим, если к вектору $\overrightarrow{OA}=\vec a$ прибавим вектор $\overrightarrow{AC}=\vec b+\vec c$. Таким образом,

$$(\vec a+\vec b)+\vec c=\vec a+(\vec b+\vec c),$$

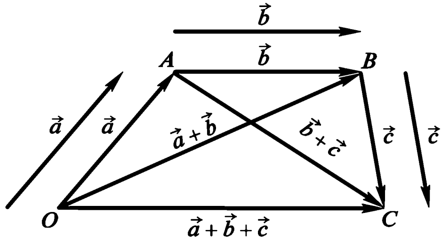


Рис. 1.27

т.е. сумма векторов обладает сочетательным свойством. Поэтому сумму трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ записывают просто $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, сумма которого с вычитаемым вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$. Таким образом, если $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, то $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

Из определения суммы двух векторов вытекает правило построения вектора-разности (рис. 1.28).

Откладываем векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ из общей точки O. Вектор $\overrightarrow{BA}$, соединяющий концы уменьшаемого вектора $\vec{a}$ и вычитаемого вектора $\vec{b}$ и направленный от вычитаемого к уменьшаемому, является разностью $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. Действительно, по правилу сложения векторов

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA} \text{ или } \vec{b}+\vec{c}=\vec{a}.$$

Пример 1.24. Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найти: а) $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$.

Решение. а) Так как $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$, а $|\overrightarrow{CA}|=a$, то $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|=a$.

б) Так как $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$, а $\overrightarrow{CB}=a$, то $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=a$.

Произведением вектора $\vec{a}$ (обозначается $\lambda\vec{a}$ или $\vec{a}\lambda$) на действительное число λ называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину, равную $|\lambda||\vec{a}|$, и то же направление, что и вектор $\vec{a}$, если $\lambda>0$, и направление, противоположное направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda<0$. Так, например, $2\vec{a}$ есть вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{a}$, а длину, вдвое большую, чем вектор $\vec{a}$ (рис. 1.29). В случае, когда $\lambda=0$ или $\vec{a}=\vec{0}$, произведение $\lambda\vec{a}$ представляет собой нулевой вектор. Противоположный вектор $-\vec{a}$ можно рассматривать как результат умножения вектора $\vec{a}$ на $\lambda=-1$ (см. рис. 1.29):

$$-\vec{a}=(-1)\vec{a}.$$

Очевидно, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Пример 1.25. Доказать, что если O, A, B и C — произвольные точки, то $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\vec{0}$.

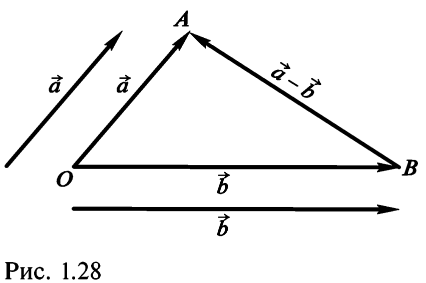


Рис. 1.28

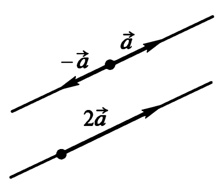


Рис. 1.29

Р е ш е н и е. Сумма векторов $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$, вектор $\overrightarrow{CO}$ — противоположный вектору $\overrightarrow{OC}$. Поэтому $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CO}=\vec{0}$.

Пусть дан вектор $\vec{a}$. Рассмотрим единичный вектор $\vec{a}_0$, коллинеарный вектору $\vec{a}$ и одинаково с ним направленный. Из определения умножения вектора на число следует, что

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}_0,$$

т.е. каждый вектор равен произведению его модуля на единичный вектор того же направления. Далее из того же определения следует, что если $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, где $\vec{a}$ — ненулевой вектор, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Очевидно, что и обратно, из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует, что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

Таким образом,

два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}. \tag{1.48}$$

Умножение вектора на число обладает следующими основными свойствами:

Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

$$(kl)\vec{a}=k(l\vec{a}) \text{ (\textit{сочетательный закон})} \tag{1.49}$$

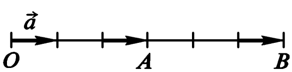
$$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a} \text{ (\textit{первый распределительный закон})} \tag{1.50}$$

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b} \text{ (\textit{второй распределительный закон}).} \tag{1.51}$$

Рис. 1.30 иллюстрирует сочетательный закон. На этом рисунке представлен случай, когда $k=2$; $l=3$.

Рис. 1.31 иллюстрирует первый распределительный закон. На этом рисунке представлен случай, когда $k=3$; $l=2$.

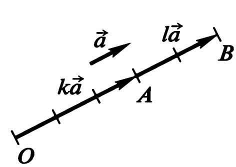
П р и м е ч а н и е. Рассмотренные свойства действий над векторами позволяют в выражениях, содержащих суммы, разности векторов и произведения векторов на числа, выполнять преобразования по тем же правилам, что и в числовых выражениях. Например, выражение



$\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}=2(3\vec{a})$

$\overrightarrow{OB}=6\vec{a}=(2\cdot 3)\vec{a}$

Рис. 1.30



$\overrightarrow{OA}=k\vec{a}$; $\overrightarrow{AB}=l\vec{a}$

$\overrightarrow{OB}=(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

Рис. 1.31

$$\vec p = 2(\vec a \quad \vec b) \quad (\vec c \quad \vec a) \quad 3(\vec b \quad \vec c \quad \vec a)$$

можно преобразовать так:

$$\vec p = 2\vec a \quad 2\vec b \quad \vec c \quad \vec a \quad 3\vec b \quad 3\vec c \quad 3\vec a \quad 5\vec b \quad 4\vec c.$$

Пример 1.26. Коллинеарны ли векторы $2\vec a$ и $-\vec a$?

Р е ш е н и е. Имеем $2\vec a = 2(\ \vec a)$, значит, заданные в условии векторы коллинеарны.

Пример 1.27. Дан треугольник ABC. Выразим через векторы $\vec a = \overrightarrow{AB}$ и $\vec b = \overrightarrow{AC}$ следующие векторы: $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

Р е ш е н и е. Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AB}$ — противоположные, поэтому $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, или $\overrightarrow{BA} = -\vec a$.

По правилу треугольника $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \quad \overrightarrow{AB}$. Но $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, поэтому

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \quad (\ \overrightarrow{AC}) \quad \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AC} \; -\vec a \quad \vec b \qquad -$$

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} = \quad \overrightarrow{AC} \qquad \vec b.$$

3. Координаты вектора. Обозначим через $\vec i$ и $\vec j$ единичные векторы, отложенные от точки O в положительных направлениях на осях Ox и Oy прямоугольной системы координат (рис. 1.32).

Пусть $\vec a$ — любой вектор на плоскости xOy. Тогда вектор $\vec a$ можно представить в виде

$$\vec a = x\vec i \quad y\vec j \tag{1.52}$$

и притом единственным образом.

Если вектор $\vec a$ представлен в виде $\vec a = x\vec i \quad y\vec j$, то говорят, что $\vec a$ разложен по векторам $\vec i$ и $\vec j$. Векторы $\vec a_x = x\vec i$ и $\vec a_y = y\vec j$ называют *составляющими вектора $\vec a$ по осям Ox и Oy*. Коэффициенты x и y разложения вектора $\vec a$ по единичным векторам $\vec i$ и $\vec j$ называют *координатами* вектора $\vec a$ в данной системе координат и записывают $\vec a\ \{x; y\}$. Тогда $|\vec a| = \sqrt{x^2 \quad y^2}$.

Из единственности представления (1.52) следует, что равные векторы имеют равные соответствующие координаты, и обратно, если у векторов соответствующие координаты равны, то равны и векторы.

Пусть дана точка $M(x; y)$. Тогда

$$\vec r = \overrightarrow{OM} \quad x\vec i \quad y\vec j,$$

где x и y — координаты точки M, т.е. $\vec r\ \{x; y\}$, $|\vec r| = \sqrt{x^2 \quad y^2}$.

Теорема 1.2. *Каждая координата суммы векторов $\vec a$ и $\vec b$ равна сумме соответствующих координат этих векторов; каждая координата произведения вектора $\vec a$ на число k равна произведению соответствующей координаты этого вектора на число k.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\vec a = x_1\vec i \quad y_1\vec j; \quad \vec b = x_2\vec i \quad y_2\vec j.$$

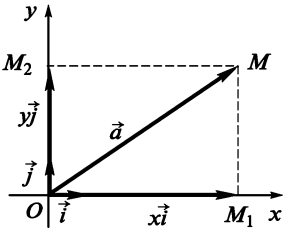


Рис. 1.32

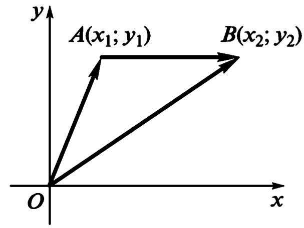


Рис. 1.33

Пользуясь свойствами сложения векторов и умножения вектора на число, получим

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}\right)+\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}\right)=\left(x_1+x_2\right)\vec{i}+\left(y_1+y_2\right)\vec{j}.$$

Аналогично доказывается:

$$k\vec{a}=k\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}\right)=\left(kx_1\right)\vec{i}+\left(ky_1\right)\vec{j}.$$

Значит, координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равны $x_1 + x_2$ и $y_1 + y_2$, а координаты вектора $k\vec{a}$ равны kx_1 и ky_1. Теорема доказана.

Следствие из теоремы 1.2. *Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, заданного двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, равны разностям соответствующих координат точек A и B.*

Доказательство. Имеем $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (рис. 1.33). Так как $\overrightarrow{OA}$ $\{x_1; y_1\}$, $\overrightarrow{OB}$ $\{x_2; y_3\}$, то по теореме 1.2

$$\overrightarrow{AB}\ \{x_2-x_1; y_2-y_1\}.$$

Пример 1.28. Найдем координаты вектора $\vec{c}=\vec{a}-3\vec{b}$, если $\vec{a}$ $\{3; 2\}$, $\vec{b}$ $\{-3; 1\}$.

Решение. Согласно теореме 1.2

$$x = 3 + 3\cdot(-3) = -6;\ y = 2 + (-3\cdot 1) = -1.$$

Пример 1.29. Найдем координаты вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, если $A(1; 3)$ и $B(5; 8)$.

Решение. Согласно следствию

$$x = 5 - 1 = 4;\ y = 8 - 3 = 5.$$

4. Скалярное произведение векторов. ***Скалярным произведением*** векторов $\vec{a}$ $\{x_1; y_2\}$ и $\vec{b}$ $\{x_2; y_2\}$ (обозначается $\vec{a}\vec{b}$) называется число $x_1x_2 + y_1y_2$. Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ обозначается $\vec{a}^2$. Очевидно, $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

Из определения скалярного произведения векторов следует, что для любых векторов $\vec{a}$ $\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2)$, $\vec{c}$ $\{x_3; y_3)$

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}. \tag{1.53}$$

Действительно, левая часть равенства есть $(x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3$, а правая $x_1x_3 + y_1y_3 + x_2x_3 + y_2y_3$. Очевидно, они равны.

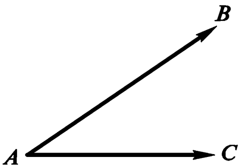


Рис. 1.34

Углом между ненулевыми векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ называется угол BAC (рис. 1.34). Углом между любыми двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом. Угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю.

Теорема 1.3. *Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.*

Из этой теоремы следует, что ***если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.*** И обратно, ***если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.***

Пример 1.30. Даны векторы $\vec{a}\{1;\ 0\}$ и $\vec{b}\{1;\ 1\}$. Найдем такое число λ, чтобы вектор $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ был перпендикулярен вектору $\vec{a}$.

Решение. Имеем: $\vec{a}(\vec{a}+\lambda\vec{b})=0$; $\vec{a}^2+\lambda(\vec{a}\vec{b})=0$. Отсюда

$$\lambda=-\frac{\vec{a}^2}{\overline{\overline{ab}}}=-\frac{1}{1}=-1.$$

5. Определители и линейные системы уравнений. Пусть дана таблица (называемая ***матрицей***), состоящая из четырех чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (1.54)$$

Она имеет две строки и два столбца. Числа, составляющие эту матрицу, обозначены буквами с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, второй — номер столбца, в которых стоит данное число.

Определителем второго порядка, соответствующим матрице (1.54), называется число $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Определитель обозначается символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ или кратко } D.$$

Таким образом,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad a_{11}a_{22}= \; a_{12}a_{21}. \qquad - \qquad (1.55)$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются *элементами* определителя. Диагональ, на которой находятся элементы a_{11} и a_{22}, называется *главной*, а диагональ, на которой находятся элементы a_{12} и a_{21} — *побочной*.

Из матрицы (1.55) видно, что для вычисления определителя второго порядка нужно из *произведения элементов*, *стоящих на глав-*

ной диагонали, вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Пример 1.31. Вычислим определитель второго порядка

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2.$$

С помощью определителей второго порядка удобно решать линейные системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (1.56)$$

Такую линейную систему, в которой свободные члены находятся в правых частях, для определенности мы будем называть *стандартной*.

Под *решением* системы (1.56) понимается всякая пара чисел (x, y), обращающая эту систему в тождество. Если существует только одна такая пара, то решение называется единственным. Аналогично вводится понятие решения для системы, содержащей n неизвестных (n = 1, 2, 3, ...).

Для нахождения решений системы (1.56) применим метод исключения. Умножая первое уравнение системы (1.56) на b_2, а второе — на b_1 и складывая, будем иметь

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1. \qquad (1.57)$$

Аналогично, умножая первое уравнение системы (1.56) на $-a_2$ а второе на a_1 и складывая, получим

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \qquad (1.58)$$

Введем *определитель системы*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

а также дополнительные определители

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что дополнительные определители D_x и D_y получаются из определителя системы D путем замены коэффициентов при указанном неизвестном на соответствующие свободные члены.

Уравнения (1.57) и (1.58) принимают вид

$$Dx = D_x, \; Dy = D_y.$$

Если $D \neq 0$, то отсюда получаем, что система (1.56) имеет единственное решение

$$x=\frac{D_x}{D},\ y=\frac{D_y}{D} \tag{1.59}$$

(*формулы Крамера*); то, что система чисел (1.59) является решением системы (1.56), можно проверить подстановкой в систему (1.56).

Примечание. Если определитель $D=0$, то система (1.56) или не имеет решения (т.е. несовместна), или имеет бесконечно много решении (т.е. система неопределенная).

Пример 1.32. Решить систему

$$\left.\begin{aligned}7x-6y&=5,\\ 8x-7y&=10.\end{aligned}\right\}. \tag{1.60}$$

Решение. Имеем

$$D=\begin{vmatrix}7&-6\\8&-7\end{vmatrix}=-49+48=-1,$$

$$D_x=\begin{vmatrix}5&-6\\-10&-7\end{vmatrix}=-35-60=-95,\quad D_y=\begin{vmatrix}7&5\\8&-10\end{vmatrix}=-70-40=-110.$$

Отсюда на основании формул Крамера (1.59) получаем

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-95}{-1}=95,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-110}{-1}=110.$$

Рассмотрим таблицу (матрицу), составленную из девяти чисел:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}. \tag{1.61}$$

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице (1.61), называется число, определяемое равенством

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}= \tag{1.62}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Структура выражения (1.62) довольно проста. Каждое его слагаемое представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца. Этому произведению приписывается соответствующий знак. Чтобы запомнить, какие произведения следует брать со знаком «плюс», какие — со знаком «минус», полезно следующее правило, называемое *правилом треугольника* (рис. 1.35).

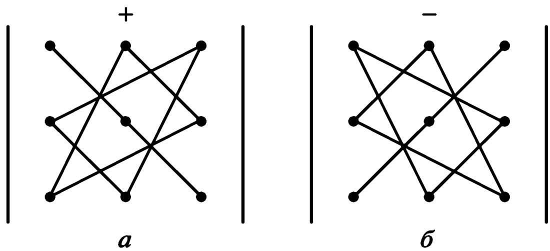


Рис. 1.35

Пример 1.33. По формуле (1.62) имеем:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{vmatrix}=15+24+24-27-20-16=0.$$

Отметим, что с помощью определителей третьего порядка, как и в случае определителей второго порядка, удобнее решать линейные системы трех уравнений с тремя неизвестными.

6. Простейшие сведения из аналитической геометрии в пространстве. Три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy и Oz в трехмерном пространстве (с указанными на них положительными направлениями), проходящие через некоторую точку O (рис. 1.36), образуют *прямоугольную декартову* систему координат пространства. Точка O называется *началом координат*, прямые Ox, Oy и Oz — *осями координат* (Ox — *ось абсцисс*, Oy — *ось ординат*, Oz — *ось аппликат*), а плоскости xOy, yOz, zOx — *координатными плоскостями*.

Прямоугольными координатами точки M называются взятые с определенным знаком расстояния (выраженные в единицах некоторого масштаба) этой точки до координатных плоскостей yOz, zOx, xOy. Эти координаты обозначаются через x, y, z и называются соответственно *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой*.

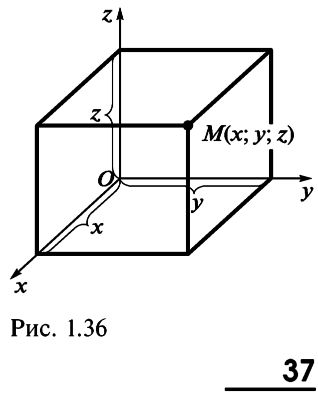


Рис. 1.36

При рассмотрении аналитической геометрии на плоскости было установлено (подразд. 1.2, п. 2), что уравнение первой степени с двумя переменными $Ax + By + C = 0$ (A, B не равны нулю одновременно) определяет прямую. Подобно этому уравнение первой степени с тремя переменными $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C не равны нулю одновременно) имеет в пространстве своим геометрическим образом *плоскость*, которую можно назвать *поверхностью первого порядка*.

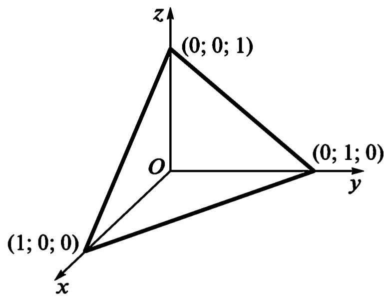


Рис. 1.37

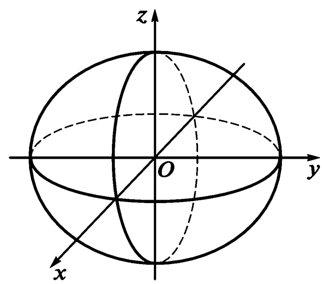


Рис. 1.38

Так, уравнение $z = 1 - x - y$ представляет плоскость, проходящую через точки (1; 0; 0), (0; 1; 0), и (0; 0; 1) (рис. 1.37).

Переход к уравнению с тремя переменными второй степени приводит уже к поверхности второго порядка. Простейшей поверхностью второго порядка является *сферическая* (или шаровая) поверхность с центром в начале координат. Ее уравнение по аналогии с уравнением окружности $x^2 + y^2 = R^2$ записывается в виде $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (рис. 1.38).[1]

Выполните задания

1. Постройте точки A (3; 5), B (–4; 2), C (1; –3), D (–2; –2), E (–6; 0). Определите расстояние между точками A и E, C и B.

2. Определите координаты вершин равностороннего треугольника, лежащего в квадранте I, со стороной, равной 10, если одна из вершин его совпадает с началом координат O, а основание треугольника расположено на оси Ox.

3. Найдите координаты вершин квадрата, диагональ которого равна 5 единицам длины, точка пересечения диагоналей — в начале координат, а диагонали лежат на осях координат.

4. Даны две смежные вершины квадрата A (3; –7) и B (–1; 4). Вычислите площадь квадрата.

5. Постройте точки A, B, C и D по их полярным координатам: A (5; 0), $B\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$, $C\left(3; \frac{\pi}{2}\right)$, D (1; π).

6. Найдите полярные координаты следующих точек: A (1; 1), B (0; 2), C (–3; 3).

7. Какие прямоугольные координаты имеют следующие точки, заданные своими полярными координатами: A (5; 0), $B\left(6; \frac{\pi}{4}\right)$, $C\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$?

---

[1] Дополнительные сведения по аналитической геометрии можно найти, например, в [5].

8. Определите, какие из точек $A(2; 0)$, $B(7; 4)$ и $C(3; 2)$ лежат на линии $y=\frac{4}{5}x\quad\frac{8}{5}.-$

9. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку M $(0; b)$ и имеющей угловой коэффициент k:

а) M $(0; 2)$, $k = 1$; б) M $(0; 0)$, $k = -1$; в) M $(0; -3)$, $k = 0$; г) M $(0; 1)$, $k = \frac{1}{2}$.

10. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку M $(x_0; y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k:

а) M $(1; 1)$, $k =1$; б) M $(3; -2)$, $k = -1$; в) M $(-2; 5)$, $k = -\frac{1}{2}$.

11. Постройте прямые:

а) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$; б) $-\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$; в) $-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$; г) $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$.

12. Прямая проходит через точки A и B:

а) A $(0; 2)$ и B $(5; 0)$; б) A $(-3; 0)$ и B $(0; -2)$; в) A $(0; 1)$ и B $(-2; 0)$.

Напишите уравнение прямой в отрезках.

13. Под каким углом пересекаются прямые:

а) $x - 2y - 2 = 0$ и $y=\frac{1}{2}x\quad 3;+$

б) $3x + y - 2 = 0$ и $x - 3y +1 = 0$?

14. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A $(2; 3)$ и параллельной прямой $y = 2x + 5$.

15. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A $(-3; 2)$ и перпендикулярной к прямой $7x + 4y - 11 = 0$.

16. Найдите точку пересечения двух прямых:

а) $3x - 2y - 4 = 0$ и $x + 3y - 5 = 0$;

б) $7x - 9y + 15 = 0$ и $19x + 12y - 20 = 0$.

17. Через точку пересечения прямых $2x - y - 3 = 0$ и $x - 3y - 4 = 0$ проведена прямая, параллельная прямой $x + y = 1$. Напишите уравнение проведенной прямой.

18. Через точку пересечения прямых $x + 2y + 2 = 0$ и $3x + 4y + 9 = 0$ проведен перпендикуляр к прямой $2x + 3y - 6 = 0$. Напишите уравнение этого перпендикуляра.

19. Даны уравнения сторон треугольника $2x - 5y = 3$, $x + 3y = 7$ и $3x - 2y + 1 = 0$. Напишите уравнение высоты, опущенной на сторону $2x - 5y = 3$.

20. Из точки A $(6; 9)$ направлен луч света под углом 45° к положительному направлению оси Ox; дойдя до оси Ox, он отражается от нее. Найдите уравнения падающего и отраженного лучей.

Примечание. Угол падения луча равен углу его отражения.

21. Найдите расстояния точек O $(0; 0)$, A $(1; 2)$, B $(-2; 1)$ от прямой $3x - 4y + 10 = 0$.

22. Даны уравнения сторон треугольника: $x - 3y + 5 = 0$, $3x + 4y + 2 = 0$ и $5x - 2y - 14 = 0$. Найдите длину отрезка, проведенного на сторону $3x + 4y + 2 = 0$.

23. Найдите уравнение окружности, у которой центр в точке $(4; 2)$ и которая проходит через точку $(3; -2)$.

24. Напишите каноническое уравнение эллипса, если даны его полуоси $a = 3$ и $b = 4$.

25. Проверьте, лежат ли на эллипсе $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ точки A (0; 2), B (3; 0), C (1; 2).

26. Дан эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Найдите его полуоси и расстояние между фокусами.

27. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках A_1 (8; 0) и A_2 (–8; 0), а фокусы – в точках F_1 (5; 0) и F_2 (–5; 0).

28. Найдите эксцентриситет эллипса $4x^2 + 9y^2 = 180$.

29. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если даны $a = 6$, $b = 2$.

30. Лежат ли на гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}=1$ точки A $(8;\ 6\sqrt{3})$, B $(6;\ 3\sqrt{5})$ и C $(3;\ 2\sqrt{6})$?

31. Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$. Найдите ее оси и расстояние между фокусами.

32. Напишите уравнение гиперболы, если ее фокусы находятся в точках F_1 (–4; 0) и F_2 (4; 0) и длина вещественной оси равна 6.

33. Найдите эксцентриситет гиперболы $24x^2 - 25y^2 = 600$.

34. Напишите уравнение гиперболы, проходящей через точку (2; 1), асимптоты которой $y = \pm\frac{3}{4}x$.

35. Найдите уравнение равносторонней гиперболы, проходящей через точку (3; – 1).

36. Напишите уравнения двух парабол с вершиной в начале координат, зная, что координаты их фокусов равны а) F (3; 0); б) F (0; –5).

37. Проверьте, лежат ли точки A (2; –2) и B (1; 2) на параболе $y^2 = 2x$.

38. Определите координаты фокусов следующих парабол: а) $y^2 = 16x$; б) $x^2 = -10y$.

39. Напишите уравнение директрисы и найдите координаты фокуса параболы $y^2 = 4x$.

40. Напишите уравнения парабол с вершиной в начале координат, для которых директрисами служат прямые: а) $x = -2$; б) $x = 3$.

41. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Найдите длины векторов: 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{AC}$.

42. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Равны ли векторы: 1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$; 4) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{OC}$?

43. $ABCD$ — параллелограмм. Докажите равенство $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$.

44. Коллинеарны ли векторы $3\vec{a}$ и $-2\vec{a}$, если $3\vec{a}-2\vec{a}=\vec{a}$ ($\neq\vec{0}$)?

45. Дан вектор $\vec{a}$ $\{3k;\ 4k\}$, где $k > 0$. Выразите длину вектора $\vec{a}$ через k.

46. Даны векторы $\vec{a}$ {3; 4}, $\vec{b}$ {–1; 2}. Найдите координаты векторов: 1) $\vec{a}+2\vec{b}$; 2) $3\vec{a}-\vec{b}$.

47. Найдите координаты вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, если A (2; 7) и B (–2; 7).

48. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ {4; 1} и $\vec{b}$ {2; –8}.

49. Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 105 & 55 \\ 245 & 154 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$.

50. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 5x+6y=13 \\ 7x+18y= \quad 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 15x-7y=9 \\ 4x+9y=35 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-y=16 \end{cases}$.

Глава 2

ФУНКЦИИ, ПРЕДЕЛЫ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ

2.1. Определение и способы задания функции

1. Действительные числа. Будем считать, что нам известны основные свойства целых чисел (0, ±1, ±2, ...).

Число x называется ***рациональным***, если его можно представить как частное двух целых чисел m и n ($n \neq 0$): $x = \frac{m}{n}$. Любое рациональное число x представимо в виде *конечной* или *бесконечной периодической десятичной* дроби.

Число x называется ***иррациональным***, если оно представимо в виде *бесконечной непериодической десятичной* дроби $x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ (например, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π и др.). Каждое иррациональное число можно с любой заданной степенью точности приблизить рациональными числами; для этого достаточно брать в десятичном разложении этого числа конечное множество знаков после запятой. Поэтому на практике при различных измерениях оперируют рациональными числами. Но в общих математических законах и формулах нельзя обойтись без иррациональных чисел (например, формула длины окружности $l = 2\pi R$ включает иррациональное число π).

Множество (совокупность) всех рациональных и иррациональных чисел называют ***множеством действительных чисел***. Действительные числа изображаются на числовой оси Ox точками (рис. 2.1). При этом каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой оси и каждой точке оси соответствует определенное действительное число. Поэтому вместо слов «действительное число» можно говорить «точка».

Абсолютной величиной (или ***модулем***) действительного числа x называется неотрицательное число $|x|$, определяемое соотношением

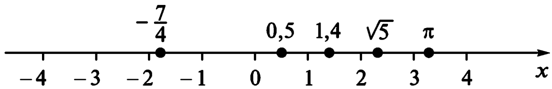


Рис. 2.1

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } \geq 0, \\ -x, \text{ если } < 0. \end{cases}$$

Непосредственно из определения абсолютной величины вытекают свойства 1 и 2.

1. $|-x| = |x|$.
2. $-|x| \leq x \leq |x|$.
3. *Неравенства* $|x| \leq a$ и $-a \leq x \leq a$ *равносильны.*

Докажем свойство 3. Из $|x| \leq a$ и свойства 2 имеем $x \leq a$. В то же время $|x| \leq a$ равносильно $-a \leq -|x|$, откуда с учетом свойства 2 следует $-a \leq x$. Таким образом, получаем $-a \leq x \leq a$. Обратно, из неравенства $-a \leq x \leq a$ вытекает, что одновременно $-x \leq a$ и $x \leq a$, т.е. по определению абсолютной величины $|x| \leq a$.

4. *Модуль суммы двух действительных чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Действительно, если $x + y \geq 0$, то по определению абсолютной величины и свойству 2 $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$. Если $x + y < 0$, то $|x + y| = - (x + y) = - x + (- y) \leq |x| + |y|$.

Примечание. Свойство 4 справедливо для любого конечного числа слагаемых.

5. *Модуль разности двух действительных чисел больше или равен разности модулей этих чисел:*

$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$

По свойству 4 имеем $|x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y|$, откуда $|x - y| \geq |x| - |y|$.

6. *Модуль произведения двух действительных чисел равен произведению модулей этих чисел:*

$$|xy| = |x||y|.$$

Примечание. Свойство 6 справедливо для любого конечного числа сомножителей.

7. *Модуль частного двух действительных чисел* (*если делитель отличен от нуля*) *равен частному модулей этих чисел:*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Свойства 6 и 7 непосредственно следуют из определения абсолютной величины числа.

Множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$ ($a < x < b$) называется *сегментом* или *отрезком* (*интервалом*) и обозначается $[a; b]$ ($(a; b)$). *Полусегментом* $[a; b)$ ($(a; b]$) называют множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x < b$ ($a < x \le b$). Множества действительных чисел x, удовлетворяющих условиям $x < a$ ($x \le a$) или $x > b$ ($x \ge b$), обозначают соответственно $(-\infty; a)$ ($(-\infty; a]$) или $(b; +\infty)$ ($[b; +\infty)$). Множество всех действительных чисел x обозначается символом $(-\infty; +\infty)$ или $|x| < \infty$, или $\boldsymbol{R}$. Все указанные множества называют *промежутками*. *Окрестностью* точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку, ε-окрестностью ($\varepsilon > 0$) точки x_0 называется интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, т.е. множество чисел x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \varepsilon$.

2. Погрешности вычисления. Пусть некоторая величина имеет точное значение a. В результате измерения этой величины получено ее приближенное значение x. *Абсолютной погрешностью* Δ_0 приближенного значения x называется модуль разности между числом x и точным значением a: $\Delta_0 = |x - a|$.

Если число a неизвестно (что бывает в большинстве измерений), то абсолютную погрешность вычислить нельзя. В этом случае используется *предельная абсолютная погрешность* — положительное число Δ, такое, что $\Delta_0 \le \Delta$. Очевидно, что

$$x - \Delta \le a \le x + \Delta.$$

Кратко последнее неравенство записывают так: $a = x \pm \Delta$.

Пример 2.1. Если x_1 и x_2 — приближенные значения точного значения числа a, причем известно, что $x_1 \le a \le x_2$, то в этом случае можно положить $a = x \pm \Delta$, где

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \Delta = \frac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

Точность измерения характеризуется с помощью *относительной погрешности*. Относительной погрешностью δ_0 приближенного значения x называется отношение абсолютной погрешности этого значения к модулю точного значения a:

$$\delta_0 = \frac{\Delta_0}{|a|}.$$

Если точное значение a неизвестно, то используют *предельную относительную погрешность* — положительное число δ, такое, что $\delta_0 \le \delta$.

Для вычисления относительных погрешностей часто используются приближенные формулы:

$$\delta_0 \approx \frac{\Delta_0}{|x|} \quad \text{и} \quad \delta \approx \frac{\Delta}{|x|}.$$

Эти формулы тем точнее, чем значение x ближе к точному значению a, т.е. чем меньше погрешность Δ_0 или Δ.

Пример 2.2. Каковы предельные абсолютная и относительная погрешности числа 1,41 как приближенного значения числа $\sqrt{2}$?

Р е ш е н и е. Так как $1{,}410 < \sqrt{2} < 1{,}415$, то $\Delta_0 = \sqrt{2} - 1{,}410 < 0{,}005$. Следовательно, можно положить $\Delta = 0{,}005$. Далее

$$\delta_0 = \frac{\Delta_0}{|x|} < \frac{0{,}005}{1{,}41} < 0{,}0036,$$

откуда $\delta = 0{,}0036$, или $\delta = 0{,}36\,\%$. Как здесь (например, при делении 0,005 на 1,41), так и в ряде других примеров для облегчения вычислений можно использовать калькулятор.

Говорят, что приближенное значение x (записанное в виде десятичной дроби) имеет *n верных* знаков, если абсолютная погрешность этого числа меньше или равна половине единицы его *n-го* разряда. Например, если 9,263 имеет 3 верных знака 9, 2 и 6, то абсолютная погрешность этого числа $\Delta_0 \le 0{,}005$.

3. Понятие функции. При изучении природных и технических процессов исследователи сталкиваются с величинами, одни из которых сохраняют одно и то же численное значение — они называются *постоянными*, а другие могут принимать различные численные значения и называются *переменными*. Примерами постоянных величин могут служить температура кипения воды при нормальном давлении, скорость тела, движущегося равномерно и прямолинейно. Скорость камня, брошенного вверх, есть переменная величина: сначала она уменьшается, и, когда камень достигает наивысшей точки полета, скорость его становится равной нулю, затем начинается свободное падение под действием силы тяжести, и скорость камня увеличивается.

В практических задачах изменение переменной величины обычно связано с изменением одной или нескольких других переменных величин. Например, путь, пройденный телом с постоянной скоростью, прямо пропорционален времени движения: $s = vt$. Этой формулой выражена зависимость переменной s — пути, пройденного телом, от переменной t — времени движения. Видно, что переменные s и t не могут принимать произвольные значения независимо друг от друга. Придав определенное значение переменной t, мы тем самым единственным образом определим значение переменной s.

Если каждому значению, которое может принять переменная x, по некоторому правилу или закону ставится в соответствие одно определенное значение переменной y, то говорят, что y есть однозначная *функция* от x, и обозначают $y = f(x)$ (читается «игрек равно эф от икс»).

Используются и другие обозначения функции: $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, $y = y(x)$ и т. п.

Переменная x называется *независимой переменной*, или *аргументом*.

Совокупность всех значений аргумента x, для которых функция $y = f(x)$ определена, называется *областью определения* этой функции. Совокупность всех значений, принимаемых переменной y, называют *областью значений* функции $y = f(x)$.

Пример 2.3. Найдем область определения функции $y = \sqrt{4 \quad x^2}$.

Решение. Эта функция имеет смысл, если $4 - x^2 \geq 0$. Отсюда $x^2 \leq 4$ или $|x| \leq 2$. Следовательно, область определения данной функции есть сегмент $[-2, 2]$. Множество значений этой функции есть сегмент $[0, 2]$.

4. Способы задания функции. ***Аналитический способ*** — это задание функции с помощью формул. Например, $y = 2x$, $y = x + 1$, $y = \lg x$, $y = \sin x$, $y = x^2$. Если уравнение, с помощью которого задается функция, не разрешено относительно y, то функция называется *неявной*. Когда такое решение возможно, неявная функция может быть приведена к явной форме, т.е. к виду $y = f(x)$. Например, уравнение $2x + 3y - 5 = 0$ можно рассматривать как неявно задающее функцию. Решив его относительно y, мы получим ту же функцию, но уже в явном виде: $y = \dfrac{5-2x}{3}$.

Отметим, что при аналитическом способе задания функции встречаются случаи, когда функция задана не одной, а несколькими формулами, например,

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leq 0, \\ -x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Табличный способ — это способ задания функции при помощи таблицы. Примерами такого задания являются таблицы тригонометрических функций, логарифмов и т.п. Табличный способ задания функции широко используется в различного рода экспериментах и наблюдениях. Таблицы просты в обращении, для нахождения значения функции не надо производить вычисления. Недостатком табличного способа является то, что функция задается не для всех значений аргумента.

Графический способ. *Графиком* функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x; y)$ плоскости xOy, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$. Само равенство $y = f(x)$ называется *уравнением* этого *графика*.

С построением графиков мы уже встречались в гл. 1. Например, графиком функции $y = 2x$ является прямая.

Говорят, что функция задана *графически*, если на плоскости имеется ее график. Заметим, что если начерчен график функции $y = f(x)$, то для нахождения значения $y = f(x_0)$, отвечающего какому-нибудь заданному значению x_0, надо отложить это значение x_0 по оси абсцисс и из полученной точки восставить перпендикуляр до пересечения с графиком. Длина этого перпендикуляра, взятая с соответствующим знаком, и равна $f(x_0)$. Например, на рис. 2.2 имеем $OA = x_0$, $AM = f(x_0)$.

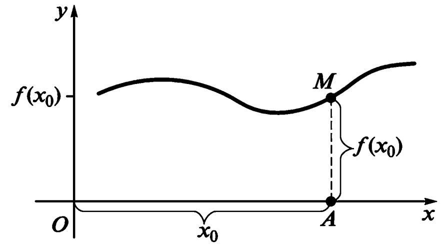


Рис. 2.2

Преимуществом графического способа задания функции по сравнению с аналитическим и табличным является его наглядность.

Графический способ задания функции используется при работе различных самопишущих приборов. В медицине, например, работа сердца анализируется с помощью кардиографа.

2.2. Обзор элементарных функций и их графиков

1. Целая рациональная функция. Многочлен вида

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$$

(a_0, a_1, a_2, ..., a_m — постоянные числа, называемые *коэффициентами* многочлена; m — натуральное число, называемое *степенью* многочлена) — *целая рациональная функция*. Эта функция определена при всех значениях x.

Пример 2.4. $y = kx + b$ — линейная функция. Ее график — прямая линия (см. подразд. 1.2). При $b = 0$ линейная функция $y = kx$ выражает прямо пропорциональную зависимость y от x. В этом случае ее график проходит через начало координат.

2. Дробно-рациональная функция. Эта функция, называемая еще рациональной дробью, определяется как отношение двух многочленов:

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n}.$$

Она определена при всех значениях x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в нуль. Дробно-рациональной функцией является, например, функция $y = \dfrac{k}{x}$, выражающая обратно пропорциональную зависимость между x и y. Ее график есть равносторонняя гипербола (см. подразд. 1.4, п. 3).

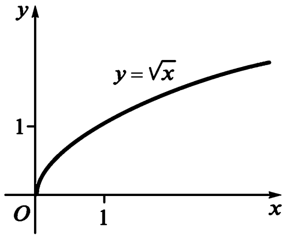


Рис. 2.3

3. Степенная функция. ***Степенная функция*** — это функция вида $y = x^{\alpha}$, где α — действительное число. Она определена при всех значениях x, если α — натуральное число; при всех x, не равных нулю, если α — целое отрицательное число, и при всех $x > 0$, если α — произвольное действительное число.

Пример 2.5. $y = ax^2$. График этой функции — парабола (см. подразд. 1.4, п. 4, рис. 1.22, *б*).

Если $\alpha = \dfrac{1}{q}$, где q — натуральное число, то степенная функция примет вид $y = \sqrt[q]{x}$. (Символ $\sqrt[q]{\ }$ называют корнем степени q, или радикалом.)

Функция $y = \sqrt[q]{x}$ определена при всех неотрицательных x, если q — четное, и при всех x, если q — нечетное.

Пример 2.6. $y = \sqrt{x}$. График этой функции (рис. 2.3) — верхняя ветвь параболы $y^2 = x$ (см. подразд. 1.4, п. 4).

4. Показательная функция. Функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется *показательной.* Она определена при всех x. Ее график показан на рис. 2.4.

5. Логарифмическая функция. Функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется *логарифмической.* Она определена при $x > 0$. Ее график показан на рис. 2.5.

6. Понятие обратной функции. Между степенной функцией и радикалом, а также между показательной и логарифмической функциями существует связь, выражаемая через понятие обратной функции.

Пусть

$$y = f(x) \tag{2.1}$$

есть функция независимой переменной x. Это означает, что, задавая значения x, мы вполне определяем значения зависимой переменной y.

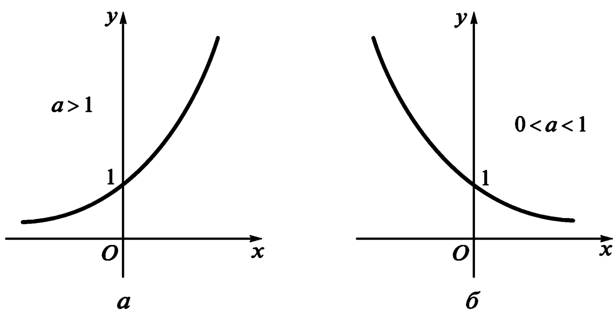


Рис. 2.4

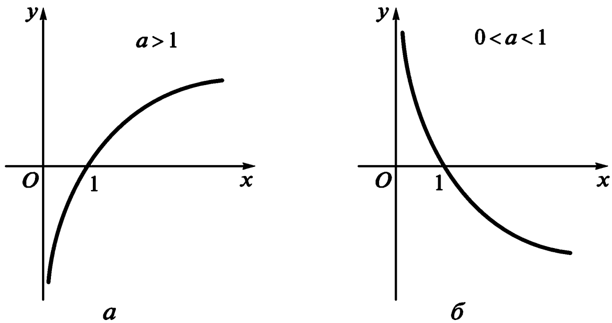


Рис. 2.5

Поступим наоборот, а именно: будем считать независимой переменной y, а зависимой — переменную x. Тогда x будет являться функцией переменной y, которая называется функцией, *обратной* к данной.

Предполагая, что уравнение (2.1) разрешено относительно x, получаем явное выражение обратной функции

$$x = \varphi(y). \tag{2.2}$$

Обратная функция однозначной функции может быть многозначной, т.е. данному значению y может соответствовать несколько значений переменной x. Иногда удается сделать обратную функцию однозначной, вводя дополнительные ограничения на ее значения.

Пример 2.7. Двузначная функция $x = \pm\sqrt{y}$ является обратной по отношению к функции $y = x^2$. Если условиться для корня брать лишь его арифметическое значение, то обратная функция будет однозначной.

Очевидно, что если (2.2) есть функция, обратная к (2.1), то и функция (2.1) будет обратной по отношению к функции (2.2), т.е. эти функции являются *взаимно обратными*.

Иногда придерживаются стандартных обозначений: под x понимают независимую переменную, а под y — функцию, т.е. зависимую переменную. В таком случае обратную функцию следует писать в виде $y = \varphi(x)$. Например, можно говорить, что функции $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$ являются взаимно обратными.

Чтобы из графика данной функции $y = f(x)$ получить график обратной ей функции $y = \varphi(x)$, очевидно, достаточно первый график симметрично отобразить относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов (рис. 2.6).

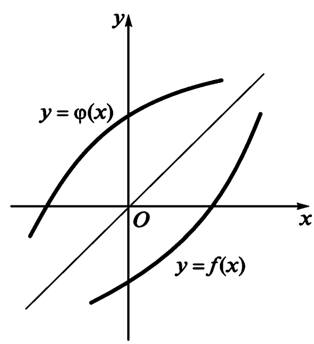


Рис. 2.6

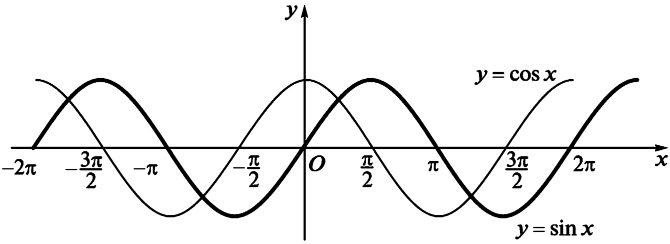


Рис. 2.7

7. Тригонометрические функции. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ определены для всех x. Они являются периодическими с периодом 2π, т.е. при изменении аргумента на число, кратное 2π, значение функции остается прежним. Кроме того, функция $\sin x$ нечетная ($\sin(-x) = -\sin x$), $\cos x$ четная ($\cos(-x) = \cos x$). Графики этих функций — синусоида и косинусоида — изображены на рис. 2.7. Функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена только в точках, где $\cos x = 0$, т.е. в точках $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), а функция $y = \operatorname{ctg} x$ не определена только в точках, где $\sin x = 0$, т.е. в точках $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). При этом $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — нечетные функции. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, имеющие период π, изображены на рис. 2.8.

Отметим, что в тригонометрических функциях переменная x обычно выражается в радианах.

8. Обратные тригонометрические функции. Функция $y = \arcsin x$. Здесь y — переменная из сегмента $|y| \le \frac{\pi}{2}$, синус которой

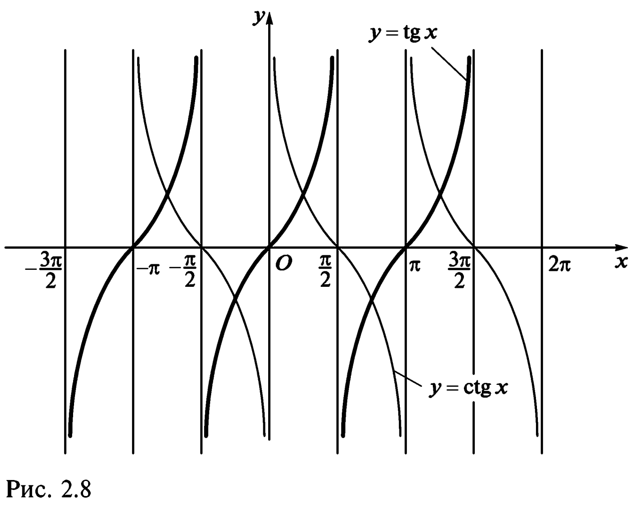


Рис. 2.8

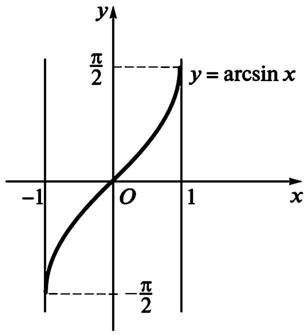


Рис. 2.9

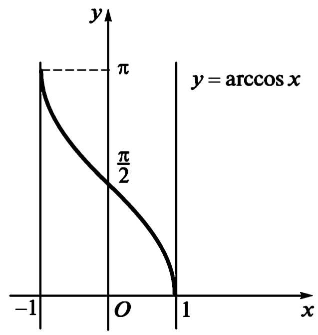


Рис. 2.10

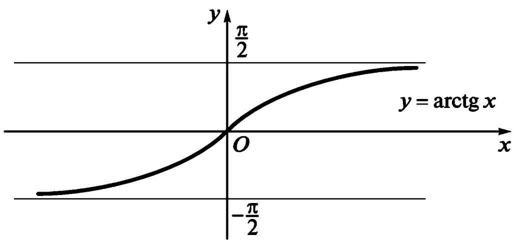


Рис. 2.11

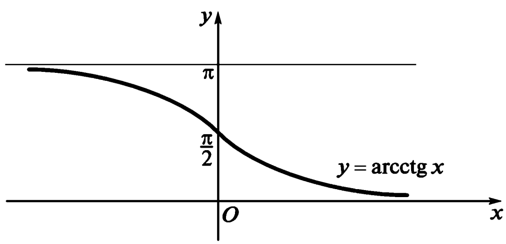


Рис. 2.12

равен x, т. е. $x = \sin y$. Область определения этой функции — сегмент $|x| \leq 1$, а ее график изображен на рис. 2.9.

Функция $y = \arccos x$ означает, что $x = \cos y$, причем $|x| \leq 1$ и $0 \leq y \leq \pi$. График $y = \arccos x$ изображен на рис. 2.10.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ есть переменная, тангенс которой равен x, т. е. $x = \operatorname{tg} y$, причем x — любое и $|y| < \frac{\pi}{2}$ (рис. 2.11), а функция $y = \operatorname{arcctg} x$ есть переменная, для которой $x = \operatorname{ctg} y$, где x — любое и $0 < y < \pi$ (рис. 2.12).

9. Сложная функция. Пусть переменная y зависит от переменной u, которая в свою очередь зависит от переменной x, т. е. $y = f(u)$,

$u = \varphi(x)$. Тогда при изменении x будет меняться u, а потому будет меняться и y. Значит, y является функцией x: $y = f(\varphi(x))$. Эта функция называется *сложной функцией* (или *функцией от функции*), переменная u — *промежуточной*. Указанную сложную функцию называют также *суперпозицией функций* f и φ.

Пример 2.8. Если $y = \sin u$, а $u = x^2$, то $y = \sin x^2$ есть сложная функция независимой переменной x.

Функции степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, постоянная (константа) называются *основными элементарными функциями*.

Всякая функция, которая получается из основных элементарных функций путем конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления), называется *элементарной функцией*.

Например, элементарными функциями будут рассмотренные выше целая рациональная и дробно-рациональная функции.

10. Гармонические колебания. В природе и технике часто происходят явления и процессы, повторяющиеся периодически, например колебание маятника, переменный ток, электромагнитные колебания и др.

Рассмотрим простейший вид колебаний, так называемое *гармоническое колебание*

$$y = A\sin\omega t, \tag{2.3}$$

где A и ω — положительные постоянные.

График функции (2.3) изображен на рис. 2.13.

Коэффициент A, представляющий наибольшую величину, которую может иметь y, *называют амплитудой* колебания, а ω — *частотой* колебания. Функция (2.3) является периодической, с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$: значения y в точках $t + k\frac{2\pi}{\omega}$ ($k = 0, \pm1, \pm2, ...$) одни и те же. Если счи-

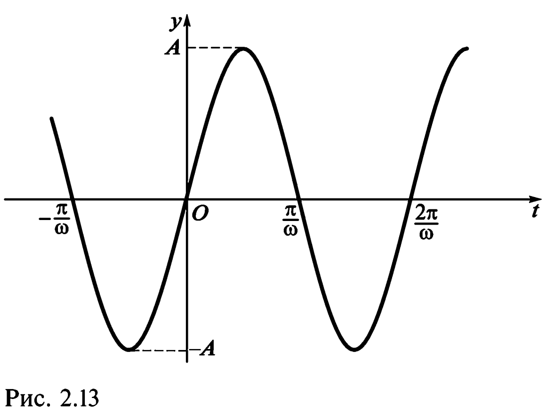


Рис. 2.13

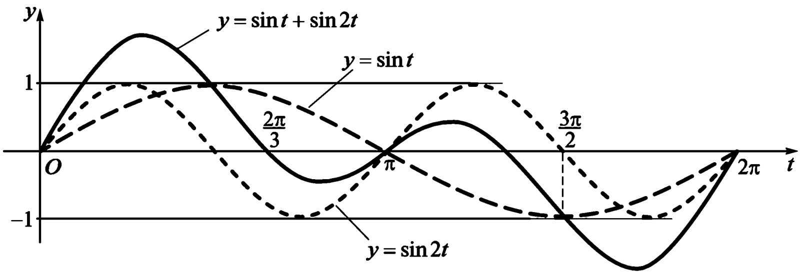


Рис. 2.14

тать, что t — время, то период $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ показывает время, в течение которого совершается одно колебание. Поэтому $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ — число колебаний за время 2π. График гармонического колебания (см. рис. 2.13) называется *простой гармоникой*.

Однако далеко не всегда периодическое явление описывается простой гармоникой. Многие из таких явлений есть результат сложения нескольких простых гармоник, который называется *сложным гармоническим колебанием*, а его график — *сложной гармоникой*.

На рис. 2.14 изображена сложная гармоника $y = \sin t + \sin 2t$ — результат сложения двух простых гармоник $y = \sin t$ и $y = \sin 2t$.

2.3. Предел функции

1. Предел числовой последовательности. ***Бесконечной числовой последовательностью*** (или просто числовой последовательностью) называется функция $a_n = f(n)$, определенная на множестве всех натуральных чисел 1, 2, ..., n, ... Значения последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называют ее *членами*.

Последовательность $a_n = f(n)$ иногда обозначают так: $\{a_n\}$. Это означает, что задана последовательность с *общим* членом a_n. По данному общему члену всегда можно найти любой член последовательности a_k, подставив в a_n вместо n число k. Далее приведены примеры последовательностей, причем сначала приведена форма записи $\{a_n\}$, а затем записаны первые члены:

1) $\{(-1)^n n\}$ $\quad -1, 2, -3, \ldots;$

2) $\{3n + 1\};$ $\quad 4, 7, 10, \ldots;$

3) $\{2 - n\};$ $\quad 1, 0, -1, \ldots;$

4) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\};$ $\quad 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots;$

5) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\};$ $\quad \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \ldots;$

6) $\left\{\dfrac{n+1}{2n}\right\};$ $\quad 1, \dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{3}, \ldots;$

7) $\left\{(-1)^n \dfrac{1}{n}\right\};$ $\quad -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \ldots .$

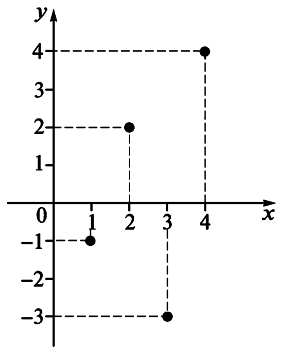


Рис. 2.15

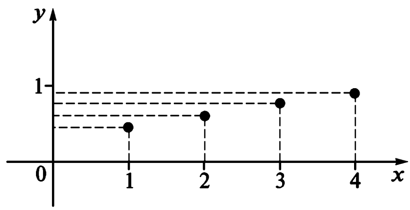


Рис. 2.16

Для числовой последовательности, как и для любой функции, можно построить график. Он не является линией, а состоит из отдельных точек, расположенных справа от оси *Oy*. На рис. 2.15 и 2.16 показаны графики последовательностей 1 и 5.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется ***невозрастающей*** (***неубывающей***), если для любого номера n справедливо неравенство $a_n \geq a_{n+1}$ ($a_n \leq a_{n+1}$).

Если $a_n > a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$), то последовательность $\{a_n\}$ ***убывающая*** (***возрастающая***). Например, последовательность 3 убывающая, последовательность 2 возрастающая.

Невозрастающие и неубывающие последовательности называют ***монотонными***.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***ограниченной сверху*** (***снизу***), если существует такое число M, что для любого номера n выполняется неравенство $a_n \leq M$ ($a_n \geq M$). Последовательность 3 ограничена сверху, например числом 1. Последовательности, одновременно ограниченные сверху и снизу, называются *ограниченными*. Последовательность 4 ограниченная.

На графике последовательности 5 (см. рис. 2.16) видно, что ординаты точек с увеличением номера n приближаются к единице. Члены последовательности 4 с возрастанием номера становятся близкими к нулю.

Определение. Число a называют ***пределом числовой последовательности*** $\{a_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, зависящий от ε, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Это обозначают так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Пример 2.9. Докажем, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Ограничимся доказательством первого из этих четырех равенств, так как доказательства трех других проводятся аналогично.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

если $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

Из последнего неравенства следует, что в качестве номера N можно взять целую часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Характер стремления последовательности к своему пределу различен. Последовательности 4 и 6 стремятся к своим пределам убывая; последовательность 5 стремится к единице возрастая; последовательность 7 стремится к нулю так, что ее члены становятся поочередно то больше, то меньше нуля.

Сформулируем без доказательства ***важные свойства пределов последовательностей*** (доказательство можно найти, например, в [10]).

1. *Последовательность может иметь только один предел.*

2. *Любая неубывающая* (*невозрастающая*) *и ограниченная сверху* (*снизу*) *числовая последовательность имеет предел.* На основании свойства 2 можно показать, например, что последовательность $\{2^{1/n}\}$ имеет предел, так как ее члены убывают, оставаясь больше единицы.

2. Число e. Рассмотрим числовую последовательность

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}. \tag{2.4}$$

Для доказательства существования предела этой последовательности воспользуемся свойством 2 из предыдущего пункта. Для этого покажем сначала, что наша последовательность возр астающая.

Разложим общий член последовательности $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ по формуле бинома Ньютона:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

или

$$a_n=2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\ldots n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{2.5}$$

Из равенства (2.5) видно, что с увеличением номера n каждое слагаемое, кроме первого, увеличивается и возрастает число таких слагаемых. Следовательно, $a_n < a_{n+1}$ для всех n, и поэтому последовательность возрастающая.

Покажем теперь, что последовательность (2.4) ограничена сверху. Заменим во всех членах разложения (2.5) выражения в круглых скобках единицами. Тогда

$$a_n < 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}.$$

Подставляя вместо множителей 3, 4, ... n в знаменателях число 2, мы еще больше увеличим правую часть:

$$a_n < 2+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Но по формуле суммы членов геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1.$$

Поэтому $a_n < 3$ при любом n.

Из свойства 2 предыдущего пункта следует, что последовательность (2.1) как возрастающая и ограниченная сверху имеет предел. Этот предел принято обозначать буквой e (так называемый ***второй замечательный предел***):

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (2.6)$$

Число e является иррациональным и приблизительно равно 2,71828 (e = 2,71828182...).

3. Закон непрерывного (органического) роста. Число e находит применение при выводе закона, которому подчиняются многие естественные процессы: распад радиоактивного вещества, размножение бактерий, рост народонаселения, рост кристаллов, рост денежных вкладов и др. Разберем типичный в этом отношении пример начисления Сбербанком процентов по вкладу.

Рост денежных вкладов. Сбербанк выплачивает 10 % годовых от суммы вклада. Если 1 января положить в Сбербанк 100 000 р., то в конце года на них будет начислено 10 000 р. Если же 1 июля взять весь вклад обратно, то будет начислено не 10 000 р., а половина этой суммы, т. е. 5 000 р. Если изъять вклад 1 апреля, то будет начислено: 10 000 р. $\cdot \frac{1}{4}$, т. е. 2 500 р.

Поэтому, вместо того чтобы вложить 1 января 100 000 р. и истребовать их в конце года, выгоднее 1 июля изъять весь вклад и вложить его снова.

В первом случае в конце года будет получено 110 000 р., во втором случае 1 июля будет получено 105 000 р.; на вторую половину года будет вложено 105 000 р., на которые будет начислено 5 %, т. е. 5 250 р., и в конце года будет получено 110 250 р.

Еще выгоднее изымать и снова вносить вклад каждый месяц, каждую неделю и т. д. В математической схеме можно представить этот процесс изъятия и внесений вклада бесконечным.

Пусть a — начальная сумма вклада и $p\%$ — годовой процент. Если ввести условие присоединения процентов по отдельным частям года, равным $\frac{1}{n}$-й доле его, причем процентная такса $p\%$ по-прежнему относится к целому году, то по истечении одной такой части года начальная сумма обратится в

$$a + a\frac{p}{100n} = a\left(1 + \frac{p}{100n}\right) = a_1,$$

по прошествии двух частей —

$$a_1 + a_1\frac{p}{100n} = a_1\left(1 + \frac{p}{100n}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^2,$$

по прошествии трех частей —

$$a_2 + a_2\frac{p}{100n} = a_2\left(1 + \frac{p}{100n}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^3 \text{ и т. д.}$$

По истечении одного года начальная сумма a обратится в $a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^n$, по истечении двух лет — в $a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{2n}$, по истечении t лет — в $a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}$.

Если ввести дальнейшее условие, что присоединение процентов производится непрерывно, т. е. число частей, на которые делится год, неограниченно возрастает ($n \to \infty$), то величина наращенной суммы A представится в виде предела выражения

$$a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt} \text{ при } n \to \infty,$$

т. е.

$$a\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}.$$

Для отыскания этого предела обозначим $\frac{p}{100n} = \frac{1}{m}$; тогда $n = \frac{pm}{100}$ и $nt = \frac{pmt}{100}$. Здесь $m = \frac{100n}{p}$, откуда следует, что при неограниченном возрастании n неограниченно растет и m.

После перехода к переменной m величина наращенной суммы по прошествии t лет определится формулой

$$A = a \lim_{m\to\infty}\left(1 \quad \frac{1}{m}\right)^{\frac{mpt}{100}} +$$

или

$$A = a\left(\lim_{m\to\infty}\left(1 \quad \frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{\frac{pt}{100}} +.$$

Учитывая, что выражение во внешних скобках представляет собой постоянную величину e, находим

$$A = a\mathrm{e}^{\frac{pt}{100}}. \qquad (2.7)$$

Приведем величину вклада при данном проценте p через t лет при однократном изъятии в конце срока:

$$A_1 = a\left(1 \quad \frac{pt}{100}+\right).$$

Значение A всегда больше A_1.

Сравним значения A и A_1 при начальном вкладе a = 1 000 000 р., времени t =10 лет и процентной ставке p = 10. Вычисления дают результат

$$A = 1\,000\,000 \cdot \mathrm{e}^{0,1\cdot 10} = 1\,000\,000 \cdot \mathrm{e} \approx 2\,718\,281,$$

$$A_1 = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 10) = 2\,000\,000.$$

Как видим, разница (в рублях) существенная.

Примечание. Формула (2.7) применяется каждый раз, когда речь идет о непрерывном органическом росте или убывании с течением времени.

Заменяя $\frac{p}{100}$ величиной k и вводя обозначение $-k$ для случая убывания, получаем формулы: $A = a\mathrm{e}^{kt}$ — для вычисления результатов процесса непрерывного роста и $A = a\mathrm{e}^{-kt}$ — для непрерывного убывания.

4. Натуральные логарифмы. Число e принято за основание системы логарифмов, называемых *натуральными логарифмами*. Оказалось, что с помощью натуральных логарифмов некоторые формулы записываются проще. Для обозначения натурального логарифма числа N пользуются символом $\ln N$.

Для отыскания приближенных значений натуральных логарифмов по таблицам десятичных логарифмов найдем связь между натуральными и десятичными логарифмами.

Если $\ln N = a$, то $N = \mathrm{e}^a$ и логарифмирование обеих частей последнего равенства по основанию 10 дает $\lg N = a \lg \mathrm{e}$ ($\lg \mathrm{e} \approx 0,4343$) или $\lg N = \ln N \lg \mathrm{e}$, откуда

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e} \quad \left(\frac{1}{\lg e} \approx 2{,}3026\right).$$

5. Предел функции. Выше было рассмотрено понятие предела для частного вида функций — числовых последовательностей. Обобщим его на произвольные функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, кроме, быть может, самой точки a.

Определение. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при стремлении x к a (или в точке a), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих условию

$$|x - a| < \delta,$$

имеет место неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to a.$$

Отсюда, если число A есть предел функции $f(x)$ в точке $x = a$, то для всех x, достаточно близких к числу a и отличных от него, соответствующие им значения функции $f(x)$ оказываются сколь угодно близкими к числу A (естественно в тех точках x, в которых функция $f(x)$ определена).

Пример 2.10. Докажем, что $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$.

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Найдем такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - 1| < \delta$, выполняется неравенство $|x - 1| < \varepsilon$. Очевидно, здесь таким δ является ε.

Пример 2.11. Покажем, что $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$.

Решение. Пусть ε — произвольное положительное число. Найдем такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - 1| < \delta$, выполняется неравенство $|x^2 - 1| < \varepsilon$.

Если $0 < |x - 1| < \delta$, то $|x + 1| = |(x - 1) + 2| \leq |x - 1| + 2 < \delta + 2$. Следовательно, $|x^2 - 1| = |x - 1||x + 1| < \delta(\delta + 2)$. Для выполнения неравенства $|x^2 - 1| < \varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы $\delta(\delta + 2) = \varepsilon$, т.е. чтобы $\delta^2 + 2\delta - \varepsilon = 0$. Отсюда $\delta = -1 + \sqrt{1+\varepsilon}$ (второй корень $\delta = -1 - \sqrt{1+\varepsilon}$ отбрасываем, так как $\delta > 0$).

Примечание. Если в формуле (2.6) положить $\frac{1}{n} = z$, то она примет вид

$$e = \lim_{z \to 0} (1 \quad z)^{\frac{1}{z}}. + \tag{2.8}$$

Оказывается, что формула (2.8) верна не только когда переменная z пробегает последовательность значений $z_n = \frac{1}{n}$, но и при любом другом законе стремления z к нулю.

При изучении свойств функции приходится рассматривать и предел функции при стремлении аргумента x к бесконечности.

Определение. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ при стремлении x к бесконечности (или в бесконечности), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число N, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Пример 2.12. Покажем, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^3}=1.$$

Решение. Пусть ε — произвольное положительное число. Найдем такое число $N > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство

$$\left|\frac{x^3+1}{x^3}-1\right|<\varepsilon.$$

Если $|x| > N$, то $|x|^3 > N^3$, и

$$\left|\frac{x^3+1}{x^3}-1\right|=\frac{1}{|x|^3}<\frac{1}{N^3}.$$

Поэтому для выполнения неравенства

$$\left|\frac{x^3+1}{x^3}-1\right|<\varepsilon$$

достаточно найти N из условия $\dfrac{1}{N^3}=\varepsilon$, т.е. взять $N=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$. Следовательно, по определению

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^3}=1.$$

Рассматривают также $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) определяется аналогично $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, только в самой формулировке определения $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ условие $|x| > N$ следует заменить на $x > N$ ($x < -N$).

2.4. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

1. Бесконечно малые и их свойства. При изучении свойств пределов функций особую роль играют функции, предел которых при стремлении аргумента к какой-либо точке равен нулю. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\left\{(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n}\right\}$ являются бесконечно малыми: их пределами является нуль (см. подразд. 2.3, п. 1). Понятие бесконечно малой последовательности можно перенести на произвольные функции.

О п р е д е л е н и е. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} (x) = 0$, т.е. если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Бесконечно малую функцию $\alpha(x)$ называют также бесконечно малой величиной, или просто бесконечно малой.

Пример 2.13. Покажем, что функция $y = x^2 \ \ 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$.

Р е ш е н и е. Пусть ε — произвольное положительное число. Найдем такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - 1| < \delta$, выполняется неравенство $|x^2 - 1| < \varepsilon$. Как показано ранее (см. подразд. 2.3, п. 5, пример 2.11), таким δ является $\delta = -1 + \sqrt{1+\varepsilon}$. Следовательно, функция $y = x^2 \ \ 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$.

В дальнейшем в данном подразделе при рассмотрении бесконечно малых будем иметь в виду, что они являются бесконечно малыми при $x \to a$.

Остановимся на *основных свойствах бесконечно малых функций*. Эти свойства будут верны также и для бесконечно малых последовательностей.

1. *Если функции* $\alpha_1(x)$ *и* $\alpha_2(x)$ *являются бесконечно малыми, то функция* $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ *также есть бесконечно малая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ε — произвольное положительное число. Так как функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ бесконечно малые, то найдутся такие числа $\delta_1, \delta_2 > 0$, что при $0 < |x - a| < \delta_1$ и $0 < |x - a| < \delta_2$ имеют место соответственно неравенства

$$|\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.9}$$

Обозначим через δ наименьшее из двух чисел δ_1 и δ_2. Тогда при $0 < |x - a| < \delta$ будут верны неравенства (2.9) и, следовательно,

$$|\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| \le |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| < \varepsilon$, а это и означает, что $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ есть функция бесконечно малая.

П р и м е ч а н и е. Свойство 1 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа бесконечно малых.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной* при $x \to a$, если существуют положительные числа M и δ, такие, что при условии $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. Например, любая бесконечно малая $\alpha(x)$ является ограниченной функцией при $x \to a$.

Температура воздуха T в данной местности — ограниченная функция времени t. Изменяясь днем и ночью, зимой и летом, она никогда не достигнет +100 °С и –100 °С. Таким образом, $|T(t)| < 100$.

2. *Произведение ограниченной при $x \to a$ функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — ограниченная функция при $x \to a$ и $\alpha(x)$ — бесконечно малая. Тогда существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \le M$ для всех x, достаточно близких к a. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Для ε существует такое $\delta > 0$, что при условии $0 < |x - a| < \delta$ одновременно выполняются неравенства $|f(x)| \le M$ и $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.
Поэтому

$$|f(x)\alpha(x)| = |f(x)||\alpha(x)| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Непосредственно из свойства 2 следуют свойства 3 и 4.

3. *Произведение постоянной на бесконечно малую есть бесконечно малая.*

4. *Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая.*

Примечание. Свойство 4 распространяется на любое конечное число бесконечно малых.

2. Бесконечно большие. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа M найдется такое натуральное число N, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| > M$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

Последовательности $\{n\}$, $\{(-1)^n \cdot n\}$ являются бесконечно большими.

Понятие бесконечно большой последовательности можно перенести на произвольные функции.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $|f(x)| > M$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$. Обозначается это так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

Если при этом $f(x)$ положительна (отрицательна) в окрестности точки a, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$).

Пример 2.14. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$

Доказательство. Действительно, при любом $M > 0$ будем иметь $\dfrac{1}{(1-x)^2} > M$, если только $(1-x)^2 < \dfrac{1}{M}$, $|1-x| < \dfrac{1}{\sqrt{M}} = \delta$. Функция $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ принимает только положительные значения.

Примечания. 1. Бесконечность (∞) не число, а символ, который употребляется, например, для того, чтобы указать, что соответствующая функция есть бесконечно большая.

2. Бесконечно большая функция $f(x)$ при $x \to a$ не имеет предела, так как предел переменной (если он существует) — некоторое число. То же в случае бесконечно большой числовой последовательности.

В дальнейшем всегда под пределом последовательности (функции) будем понимать конечный предел, т.е. число, если не оговорено противное.

Далее рассматриваются бесконечно большие функции при $x \to a$. Как видно из следующих свойств, которые верны и для последовательностей, бесконечно большие и бесконечно малые функции тесно связаны между собой.

1. *Если функция $f(x)$ бесконечно большая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая.*

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и обозначим $\dfrac{1}{\varepsilon} = M$. Так как $f(x)$ бесконечно большая, то числу M соответствует $\delta > 0$, такое, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| > M = \dfrac{1}{\varepsilon}$, откуда $\dfrac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$.

2. *Если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая и не обращается в нуль, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая.*

Доказательство. Возьмем любое $M > 0$ и обозначим $\dfrac{1}{M} = \varepsilon$ Так как $\alpha(x)$ бесконечно малая, то числу $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta > 0$, такое, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon = \dfrac{1}{M}$, откуда $\dfrac{1}{|\alpha(x)|} > M$.

Замечание. В данном параграфе были рассмотрены функции аргумента x для случая, когда $x \to a$. Однако все предложения, установленные здесь, остаются в силе и для случая, когда x стремится к бесконечности. При этом все доказательства аналогичны.

2.5. Основные теоремы о пределах и их применение

1. Основные теоремы о пределах. Далее рассматриваются функции аргумента x, при этом x стремится к a или x стремится к бесконечности. Все устанавливаемые в этом пункте предложения о пределах имеют место в обоих случаях; они верны также и для последовательностей. Здесь приводится доказательство для одного из этих случаев ($x \to a$), так как для другого доказательство аналогично. Это замечание относится и к п. 4 данного подраздела.

Теорема 2.1. *Для того чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представима в виде*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина.

Доказательство. 1) Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. функция $\alpha(x) = f(x) - A$ есть бесконечно малая и $f(x) = A + \alpha(x)$.

2) Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для x из $0 < |x - a| < \delta$ будет $|\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. A — предел функции $f(x)$ при $x \to a$.

Следствие 1. ***Функция в одной точке не может иметь двух различных пределов.***

Теорема 2.2. *Предел постоянной величины равен самой постоянной.*

Это непосредственно вытекает из определения предела.

Теорема 2.3. *Если функция $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) для всех x в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a, и в точке a имеет предел, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$ ($\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq 0$).*

Доказательство. Пусть, например, $f(x) \geq 0$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Если бы было $A < 0$, то для $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$ было бы невозможно ни при каком $\delta > 0$, так как влекло бы за собой отрицательность $f(x)$.

Примечание. Заметим, что при условии существования $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, из $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), вообще говоря, не вытекает $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$ ($\lim\limits_{x \to a} f(x) < 0$), а только $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$ ($\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq 0$). Так, $|x| > 0$ для всех $x \neq 0$, но $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$.

Теорема 2.4. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют пределы при $x \to a$, то при $x \to a$ имеют пределы также их сумма $f_1(x) + f_2(x)$, произведение $f_1(x) \cdot f_2(x)$ и при условии $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) \neq 0$ частное $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, причем*

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \quad \lim_{x \to a} f_2(x), \tag{2.10}$$

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \ \lim_{x \to a} f_2(x), \tag{2.11}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая суммы. Все остальные утверждения доказываются аналогично.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_2$. Тогда согласно теореме 2.1

$$f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x), \quad f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x),$$

где $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ — бесконечно малые. Отсюда

$$f_1(x) + f_2(x) = (A_1 + A_2) + (\alpha_1(x) + \alpha_2(x)).$$

По свойству 1 бесконечно малых (см. подразд. 2.4) сумма $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ бесконечно мала. Следовательно, по теореме 2.1

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) + f_2(x)] = A_1 + A_2.$$

Примечание. Формула (2.10) распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых, а формула (2.11) — на случай любого конечного числа сомножителей.

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то*

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n,$$

где n — натуральное число.

Следствие 3. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:*

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x); \quad c = \text{const}.$$

Теорема 2.5. *Если для функций $f(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство*

$$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) \qquad (2.13)$$

и $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Доказательство. Из определения предела вытекает, что в некоторой окрестности точки a (при $x \ne a$) будут одновременно выполняться следующие неравенства:

$$|f_1(x) - A| < \varepsilon, \quad |f_2(x) - A| < \varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число. Запишем эти неравенства, освободившись от знака абсолютной величины:

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon, \qquad (2.14)$$

$$A - \varepsilon < f_2(x) < A + \varepsilon. \qquad (2.15)$$

Из неравенств (2.13) и (2.14) имеем

$$A - \varepsilon < f_1(x) \le f(x),$$

откуда

$$A-\varepsilon < f(x). \qquad (2.16)$$

Аналогично из неравенств (2.13) и (2.15) получим

$$f(x) < A+\varepsilon. \qquad (2.17)$$

Из (2.16) и (2.17) следует, что $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ или $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

2. Примеры вычисления пределов.

Пример 2.14. Найдем $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+1)$.

Решение. Используя теоремы 2.4, 2.2, следствия 3, 2 и пример 2.10 (подразд. 2.3, п. 5), последовательно получаем

$$\lim_{x\to 1}(2x^2+1) = \lim_{x\to 1} 2x^2 + \lim_{x\to 1} 1 = 2(\lim_{x\to 1} x)^2 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Пример 2.15. Найдем $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+1}{x^3+1}$.

Решение. Применяя теоремы 2.4, 2.2, следствия 2, 3 и пример 2.10 (подразд. 2.3, п. 5), находим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+1}{x^3+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^3+1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} x^2 - \lim\limits_{x\to 1} 5x + \lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1} x^3 + \lim\limits_{x\to 1} 1} =$$

$$= \frac{(\lim\limits_{x\to 1} x)^2 - 5\lim\limits_{x\to 1} x + 1}{(\lim\limits_{x\to 1} x)^3 + 1} = \frac{1-5+1}{1+1} = -\frac{3}{2}.$$

Как показывают решения приведенных примеров, в простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Однако не всегда можно вычислить предел с помощью формул (2.10), (2.11), (2.12). Так, формулы (2.10) и (2.11) утрачивают смысл, если хотя бы одна из функций $f_1(x)$ или $f_2(x)$ не имеет предела. Формула (2.12) неверна, если знаменатель дроби стремится к нулю. Рассмотрим два случая.

1. Предел числителя не равен нулю.

Пример 2.16. Найдем $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2) = 0$, поэтому формулу (2.12) в этом примере использовать нельзя. Так как

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)}{\lim\limits_{x\to 1} x^2} = \frac{0}{1} = 0,$$

то функция $\dfrac{1-x^2}{x^2}$ бесконечно малая при $x \to 1$ (см. подразд. 2.4, п. 1). Тогда (см. подразд. 2.4, п. 2) функция $\dfrac{x^2}{1-x^2}$ бесконечно большая при $x \to 1$, т.е. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{1-x^2} = \infty$.

Можно отметить, что, когда x приближается к 1 слева, т.е. оставаясь все время меньше 1 (что записывают как $x \to 1 - 0$), функция $\frac{x^2}{1-x^2}$ остается все время положительной. В этом случае записывают

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2}{1-x^2} = +\infty$$

Если же x приближается к 1 справа, т.е. оставаясь все время больше 1 (что записывают $x \to 1 + 0$), эта функция остается все время отрицательной. В этом случае записывают

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x^2}{1-x^2} = -\infty$$

2. Предел числителя равен нулю.

Пример 2.17. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2+x}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+3x) = 0 + 3\cdot 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x) = 0+0=0$. Говорят, что в этом случае имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Однако предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2+x}$ существует, и его можно найти. Для его нахождения, т.е. раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$, надо предварительно преобразовать дробь $\frac{x^2+3x}{x^2+x}$, разделив числитель и знаменатель почленно на x, что возможно, так как до перехода к предельному значению $x \neq 0$. Следовательно, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x+1}.$$

Но $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+3}{x+1} = 3$ (здесь формула (2.12) применима, так как $\lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1 \neq 0$). В результате имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2+x} = 3.$$

Пример 2.18. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}) = 0,\ \lim_{x\to 0} x \quad 0, \quad =$$

то здесь также имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, преобразуем дробь, стоящую под знаком предела, умножив числитель и знаменатель этой дроби на $(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})$ и сделав после чего необходимые упрощения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4-x-(4+x)}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}} = -2\frac{1}{2+2} = -\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим теперь примеры на вычисление пределов функций при $x \to \infty$.

Пример 2.19. Найдем $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{3x+2}$.

Решение. Очевидно, $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)=\infty$. Поэтому (см. подразд. 2.4) функция $\dfrac{1}{3x+2}$, значит, и функция $\dfrac{4}{3x+2}$ бесконечно малая при $x\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{3x+2}=0$.

Пример 2.20. Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{4x+1}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(4x+1)=\infty$. Говорят, что в этом случае имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия предварительно числитель и знаменатель дроби $\dfrac{3x+5}{4x+1}$ почленно разделим на x. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{5}{x}}{4+\dfrac{1}{x}}.$$

Но

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0.$$

В результате имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}=\frac{3}{4}.$$

Аналогично устанавливается, что при $x \to \infty$ дробно-рациональная функция стремится либо к нулю, либо к бесконечности, либо к конечному числу, отличному от нуля, в зависимости от того, будет ли степень числителя меньше степени знаменателя, больше ее или равна ей.

3. Первый замечательный предел. Справедливо равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{2.18}$$

Равенство (2.18) называется *первым замечательным пределом*. С его помощью можно вычислять пределы различных функций, содержащих тригонометрические функции и степени x.

Перейдем к доказательству равенства (2.18). Возьмем круг единичного радиуса и предположим, что угол x, выраженный в радианах, заключен в интервале $(0; \frac{\pi}{2})$ (рис. 2.17). Обозначим площади треугольников OAB и OAC соответственно через S_1 и S_2, а площадь сектора OAB — через S. На рис. 2.17 видно, что

$$S_1 < S < S_2. \tag{2.19}$$

Замечая, что $BD = \sin x$, $AC = \operatorname{tg} x$, имеем $S_1 = \frac{1}{2}\sin x$, $S = \frac{1}{2}x$, $S_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Поэтому с учетом неравенства (2.19) получаем

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

откуда после деления на $\sin x$ и сокращения на $\frac{1}{2}$ находим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

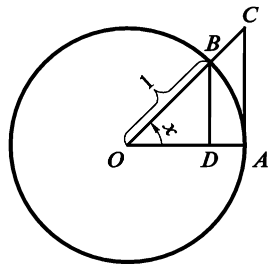


Рис. 2.17

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (2.20)$$

Неравенства (2.20) получены для $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Однако $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ — четные функции: $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$. Тем самым неравенства (2.20) справедливы и в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ (это следует из геометрического определения косинуса), то из (2.20) на основании теоремы 2.5 заключаем, что действительно имеет место равенство (2.18).

Пример 2.21. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3.$$

Пример 2.22. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin 2x}{2x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}} = \frac{2}{5}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{2}{5}.$$

4. Сравнение бесконечно малых. Рассмотрим отношение двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ (для компактности записи будем обозначать их просто α и β). Выделим три случая.

1. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = 0$. В этом случае говорят, что α — бесконечно малая более *высокого* порядка, чем β.

Пример 2.23. При $x \to 2$ функция $(x-2)^3$ бесконечно малая более высокого порядка, чем $x-2$, так как $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^3}{x-2} = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ (A — число). В этом случае функции α и β называют бесконечно малыми *одного* и того же порядка.

Пример 2.24. При $x \to 0$ функции $5x^2$ и x^2 являются бесконечно малыми одного порядка, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{x^2} = 5$.

3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \infty$. В этом случае говорят, что α — бесконечно малая более *низкого* порядка, чем β. Можно сказать также, что β — бесконечно малая более высокого порядка, чем α.

Пример 2.25. При $x \to -1$ функция $x + 1$ бесконечно малая более низкого порядка, чем $(x - 1)(x + 1)^2$, так как

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)^2} = \infty$$

Если функции α и β бесконечно малые одного и того же порядка, причем $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = 1$, то они называются *эквивалентными* бесконечно малыми. Символически это записывают так: $\alpha \sim \beta$.

Из определения, в частности, следует, что если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$, т. е. если α и β — бесконечно малые одного порядка, то α и $A\beta$ будут являться эквивалентными бесконечно малыми: $\alpha \sim A\beta$.

Пример 2.26. Как установлено в п. 3, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, т. е. $\sin x$ и x при $x \to 0$ являются эквивалентными бесконечно малыми.

Пример 2.27. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$, то $\mathrm{tg}x \sim x$ при $x \to 0$.

Теорема 2.6. *Если существует предел отношения двух бесконечно малых α и β, то он равен пределу отношения соответствующих им эквивалентных бесконечно малых.*

Доказательство. Действительно, если $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$ и существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}$, то, перейдя к пределу в равенстве $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\frac{\beta_1}{\beta}$, получим

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\frac{\beta_1}{\beta}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta_1}{\beta} = 1\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot 1 = \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Доказанная теорема позволяет во многих случаях упрощать отыскание предела.

Пример 2.28. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}3x} = \lim\limits_{x\to a}\frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$, так как $\sin 5x \sim 5x$ и $\mathrm{tg}3x \sim 3x$ при $x \to 0$.

2.6. Непрерывность функции

1. Понятие непрерывности. Мы видели, что графиками последовательностей являются множества точек; эти точки всегда находятся на некотором расстоянии друг от друга (*дискретное* множество точек). Графиком же, например, степенной функции является кривая, которая похожа на росчерк пера, на «сплошную», «непрерывную» линию. Оказывается, эту разницу характеризует точное математическое понятие непрерывности, к введению которого и перейдем.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале, x_0 и x — два произвольных значения аргумента из этого интервала. Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, откуда $x = x_0 + \Delta x$. Говорят, что для перехода от значения аргумента x_0 к значению x первоначальному значению придано приращение Δx.

Приращением Δy функции $y = f(x)$, соответствующим приращению Δx аргумента x в точке x_0, называется разность

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Например, приращением функции $y = x^3$, которое соответствует приращению Δx аргумента x в точке x_0, будет величина

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если бесконечно малому приращению Δx аргумента x в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Другими словами, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е. предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Пример 2.29. Функция $y = x$ непрерывна при любом значении $x = x_0$. В самом деле, $\Delta y = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$ и, значит, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$.

Пример 2.30. Функция $y = \sin x$ непрерывна при любом значении $x = x_0$. В самом деле,

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2} = \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\Delta x.$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\Delta x\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Аналогично доказывается непрерывность функции $\cos x$. Функция, непрерывная в каждой точке интервала, называется непрерывной на этом интервале.

Теорема 2.7. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в этой точке также их алгебраическая сумма $f_1(x) \pm f_2(x)$, произведение $f_1(x) \cdot f_2(x)$ и при условии $f_2(x_0) \neq 0$ частное $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$.*

Эта теорема вытекает из аналогичной теоремы о пределах.

Примечание. Для алгебраической суммы и произведения теорема 2.7 распространяется на любое конечное число функций.

Теорема 2.8. *Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Согласно непрерывности функции $u = \varphi(x)$ имеем $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \quad u_0$, т.е. при $x \to x_0$ также и $u \to u_0$.

Поэтому в силу непрерывности функции $f(u)$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{u\to u_0} f(u) \quad f(u_0) = f(\varphi(x_0))$, что и доказывает теорему.

Таким образом, сложная функция $y = f(\varphi(x))$, образованная из двух непрерывных функций $f(u)$ и $\varphi(x)$, является непрерывной функцией.

Например, сложная функция $y = \cos(x^2 + 2x - 1)$ непрерывна для всех значений x, так как функции $y = \cos u$ и $u = x^2 + 2x - 1$ всюду непрерывны.

Имеет место и следующая теорема.

Теорема 2.9. *Если $f(x)$ — непрерывная функция, имеющая однозначную обратную функцию, то обратная функция тоже непрерывна.*

Вместо доказательства ограничимся следующим наглядным соображением: если график функции $f(x)$ — непрерывная кривая, то график обратной к ней функции тоже непрерывная кривая.

Теорема 2.10. *Все основные элементарные функции непрерывны там, где они определены.*

Доказательство. Постоянная функция $y = C$ непрерывна при любом значении $x = x_0$, так как $\Delta y = C - C = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$. Так как функция $y = x$ непрерывна при любом x (см. пример 2.29), то согласно теореме 2.7 степенная функция $y = x^n$, где n — натуральное число, также непрерывна при любом x.

Непрерывность тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ имеет место всюду (см. пример 2.30); $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ непрерывны всюду, где они определены, как отношение двух непрерывных функций $\sin x$ и $\cos x$.

Можно доказать непрерывность и других основных элементарных функций там, где они определены.

Из теорем 2.7, 2.8 и 2.10 получаем следствие.

Следствие. *Всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, принадлежащих ее области определения.*

Имеет место следующее предложение [10].

Теорема 2.11. *Функция $f(x)$, непрерывная в точке x_0, не равная нулю в этой точке, сохраняет знак $f(x_0)$ в некоторой окрестности этой точки.*

Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ *разрывна*, а точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

В качестве конкретного примера функции, имеющей точку разрыва, рассмотрим скорость тела, падающего на землю. Эта скорость вообще является непрерывной функцией времени, но для момента удара можно условно считать, что она мгновенно (скачком) падает до нуля, т.е. скорость терпит разрыв.

Пределом функции $f(x)$ в точке x_0 *слева* (*справа*) называется предел, вычисляемый в предположении, что x стремится к x_0, оставаясь все время меньше (больше) значения x_0. Пределы слева и справа, называемые *односторонними* пределами, соответственно обозначают

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 *слева* (*справа*), если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$).

2. Свойства функций, непрерывных на сегменте. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на сегменте* $[a; b]$, если она непрерывна в интервале (a, b) и, кроме того, в точке a непрерывна справа, а в точке b — слева.

Приведем без доказательства следующие свойства функций, непрерывных на отрезке. (Доказательство см. в списке литературы, [10].)

1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$ и на концах его принимает значения разных знаков, то между точками a и b найдется точка c, такая, что $f(c)=0$.*

Это свойство имеет простой геометрический смысл (рис. 2.18): если непрерывная кривая переходит с одной стороны оси Ox на другую, то она пересекает ось Ox.

2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то она ограничена на нем, т.е. существует такое положительное число M, что $|f(x)| \le M$* при $a \le x \le b$.

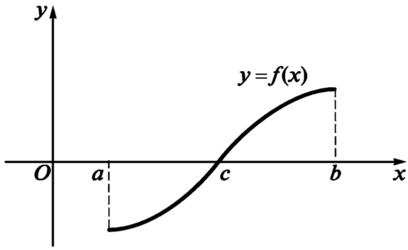


Рис. 2.18

3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то на этом сегменте найдутся точки x_1 и x_2, такие, что значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ будут соответственно наибольшим и наименьшим из всех значений функции $f(x)$ на сегменте $[a;\ b]$.*

2.7. Комплексные числа

1. Определение комплексных чисел и основные операции над ними. К комплексным числам обычно приходят, рассматривая уравнение $x^2 + 1 = 0$. Очевидно, не существует действительных чисел, удовлетворяющих этому уравнению. Корнями его (как и целого ряда других уравнений) оказываются комплексные числа.

Под *комплексным числом* понимается выражение

$$z = x + iy, \tag{2.21}$$

где x и y — действительные числа, а i — мнимая единица.

Числа $x + i0 = x$ отождествляются с действительными числами; в частности, $0 + i0 = 0$. Числа $0 + iy = iy$ называются *чисто мнимыми*.

Действительные числа x и y называют соответственно *действительной* и *мнимой частями* числа z и обозначают следующим образом:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Под *модулем* комплексного числа z понимается неотрицательное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Сопряженным числом $\bar{z}$ к числу (2.21) называют комплексное число $\bar{z} = x - iy$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел определяются следующим образом:

I. $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

II. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Отсюда, в частности,

$$i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1,$$

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |\, z \,|^2 .$$

III. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0).$

2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат xOy (рис. 2.19). Так как комплексное число $z = x + iy$ является парой (x, y) действительных чисел, а каждой паре (x, y) действительных чисел соответствует одна точка плоскости и наоборот (см. подразд. 1.1, п. 1), то каждую точку $M(x; y)$ плоскости можно принять за изображение комплексного числа $z = x + iy$. В этом случае эта плоскость называется *комплексной плоскостью*, а z — *точкой* этой плоскости.

На оси Ox расположены действительные числа: $z = x + i0 = x$; поэтому она называется *действительной осью*. На оси Oy расположены чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$, она называется *мнимой осью*.

Заметим, что $r = |z|$ представляет собой расстояние от точки z до начала координат.

Удобной является интерпретация комплексного числа $z = x + iy$ как радиуса-вектора $\overline{OM}$ (см. рис. 2.19). Очевидно, каждому радиусу-вектору плоскости с концом в точке $M(x; y)$ соответствует комплексное число $z = x + iy$ и наоборот. Нулевому вектору соответствует комплексное число $0 + i0$.

Положение точки z на плоскости, кроме ее прямоугольных координат x, y, может быть определено также и полярными координатами r, φ, при этом (см. подразд. 1.1, п. 2)

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{2.22}$$

Число φ будем называть *аргументом* комплексного числа z. Аргумент считается положительным или отрицательным в зависимости от того, ведется ли его отсчет от положительного направления действительной оси против или по часовой стрелке соответственно.

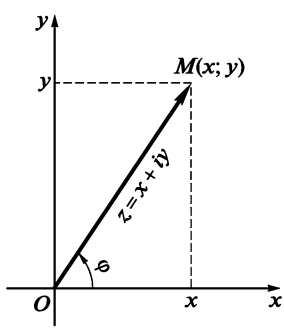


Рис. 2.19

По заданной точке z ее модуль определяется единственным образом, а аргумент — *с точностью до слагаемого* $2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Значение аргумента φ, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leq \pi$, называется *главным* и обозначается $\arg z$.

Точка $z = 0$ является единственной точкой комплексной плоскости, для которой аргумент не определен.

3. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Из формул (2.22) получается тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2.23}$$

Пользуясь записью (2.23) для комплексных чисел

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

имеем

$$z_1 z_2 = r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \tag{2.24}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (r_2 \neq 0).$$

Следовательно, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

4. Возведение в степень и извлечение корня. Следствием формулы (2.24) является формула

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{2.25}$$

где n — натуральное число.

Пусть

$$\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

где $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда на основании формулы (2.25) имеем

$$z = (\rho(\cos\psi + i\sin\psi))^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Отсюда

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

и, следовательно, $\rho = \sqrt[n]{r}$ (под $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметическое значение корня), $\psi = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$.

Здесь в качестве k достаточно брать лишь значения $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, так как при прочих значениях k получаются повторения уже найденных значений корня. Таким образом, окончательно

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \tag{2.26}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Пример 2.31. Найти $w = \sqrt{-1}$.

Решение. Так как $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, то на основании формулы (2.26) имеем

$$\sqrt{-1} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{2},\ k = 0, 1.$$

Отсюда

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;\quad w_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

5. Формула Муавра. Формула Эйлера, выражения тригонометрических функций через показательную функцию. Формула (2.25) может быть переписана в виде

$$r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Полагая здесь $r = 1$, получаем формулу

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

называемую *формулой Муавра*[1].

Справедлива и следующая формула [12]:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi},$$

называемая *формулой Эйлера*[2].

Выполните задания

1. Дано $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 3}$. Найдите $f(1)$.

2. Дано $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Покажите, что $f(2) = f(3) = 0$.

3. Найдите значения функции $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 1}$ для значений аргумента, равных -1; 0; 1; 2.

4. Полагая $f(x) = \cos 2x$, вычислите $f(0); f\left(\dfrac{\pi}{2}\right); f\left(\dfrac{\pi}{4}\right); f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

5. Найдите области определения функций:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3 + n - 1}{n^4 + 2n}$; б) $y = \dfrac{2}{\sqrt{25 - x^2}}$; в) $y = \dfrac{5 - \sqrt{x - 2}}{\sqrt{5 - x}}$; г) $y = \sqrt{3 + x} + \sqrt[4]{7 - x}$; д) $y = \sqrt[3]{1 - x} + \sqrt[5]{x - 3}$; е) $y = x\arcsin x$; ж) $y = 2^x$; з) $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

6. Постройте графики функций:

а) $y = 3x + 5$; б) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$; в) $y = 4 - 4x^2$; г) $y = \dfrac{5}{x}$; д) $y = x^3 + 1$;

---

[1] Абрахам Муавр (1667 — 1754) — английский математик.

[2] Леонард Эйлер (1707 — 1783) — великий математик, большую часть своей жизни провел в России, по происхождению швейцарец.

е) $y=\sin 2x$; ж) $y=\cos 3x$; з) $y=\sin\frac{x}{2}$; и) $y=\cos\frac{x}{3}$; к) $y=2\operatorname{tg}x$; л) $y=4\sin x$; м) $y=5\cos x$.

7. Изобразите точками на плоскости последовательности, заданные общими членами:

а) $a_n=\frac{1}{n+1}$; б) $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$; в) $a_n=\frac{1}{n^2}$; г) $a_n=\frac{n+1}{2n}$; д) $a_n=\frac{3n+1}{n}$.

Вычислите указанные пределы:

8. $\lim\limits_{x\to-2}(x^2+6x+8)$. **9.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2x+3}{x^2+1}$. **10.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$. **11.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$.

12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^3+3x^2-x}{7x}$. **13.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^2-1}$. **14.** $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$.

15. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$. **16.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$. **17.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.

18. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. **19.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$. **20.** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+x}$. **21.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

22. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$. **23.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$.

24. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$. **25.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}$. **27.** $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$. **28.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

29. $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$. **30.** $\lim\limits_{x\to5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)^2}{(x-5)^2}$. **31.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})^3}{x^3}$.

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-n+1}{2n^3+n^2}$. **33.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^3+7x-1}$. **34.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+n-1}{n^4+2n}$.

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-x+3}{x^3-8x+5}$. **36.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^3+5}{3x^4-5x^2+1}$. **37.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$.

38. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$. **39.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)^n$. **40.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$. **41.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

42. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$. **43.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$. **44.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$. **45.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

46. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$. **47.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin 2x}$. **48.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}2x}{x}$. **49.** $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}$.

50. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$. **51.** $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$. **52.** $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

53. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x}$. **54.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt[4]{1+x^2}-1)\operatorname{tg}\frac{x}{3}}{x}$. **55.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)\cos\pi x}{x}$.

56. $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{ctg}x$. **57.** $\lim\limits_{x\to0}(1+3\operatorname{tg}^2x)^{\operatorname{ctg}^2x}$.

58. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(a+x)+\sin(a-x)-2\sin a}{x^2}$. **59.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

60. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$. **61.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)+\cos(a-x)-2\cos a}{1-\cos x}$.

62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$. **63.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$. **64.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x}$.

65. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$. **66.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$. **67.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}$. **68.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos 2x-2\cos x}{2\cos x-2}$. **70.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$.

71. Какие нижеследующие бесконечно малые при $x\to 0$ будут бесконечно малыми одного порядка, высшего порядка, низшего порядка по отношению к функции $\beta(x)=x$:

а) $\alpha(x)=3x$; б) $\alpha(x)=2\sin x$; в) $\alpha(x)=x^2$; г) $\alpha(x)=\sin^2 x$; д) $\alpha(x)=\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}$?

Исследуйте на непрерывность следующие функции:

72. $f(x)=x\ \ 1+$в точках $x=1$ и $x=-1$. **73.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ если } \geq 1,\\ x, \text{ если } <1,\end{cases}$ в точке $x=1$. **74.** $f(x)=\begin{cases}x-1, \text{ если } \leq x<3,\\ 3-x, \text{ если } \leq x\leq 4,\end{cases}$ в точке $x=3$.

75. Найдите $(3+5i)(4-i)$.

76. Найдите $(6+11i)(7+3i)$.

77. Найдите $\dfrac{3-i}{4+5i}$.

78. Найдите: а) $(4-7i)^2$; б) i^{10}.

79. Представьте числа i; -2; $-i$; $1+i$; $1-i$ в тригонометрической форме.

80. Найдите все значения для указанных радикалов:

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[4]{1}$; в) $\sqrt{-5-12i}$.

81. Используя формулу Эйлера, вычислите действительную и мнимую части, а также модуль выражений:

а) e^{3i}; б) e^{-i}.

Глава 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1. Понятие производной, ее механический и геометрический смысл

1. Задачи, приводящие к понятию производной. ***Задача о скорости движущейся точки.*** Пусть $s = s(t)$ представляет закон прямолинейного движения материальной точки. Это уравнение выражает путь s, пройденный точкой, как функцию времени t. Обозначим через Δs путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt от момента t до $t + \Delta t$, т. е. $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$. Отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ называется *средней скоростью* точки за время от t до $t + \Delta t$. Чем меньше Δt, т. е. чем короче промежуток времени от t до $t + \Delta t$, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент времени t. Поэтому естественно ввести понятие скорости v в данный момент t, определив ее как предел средней скорости за промежуток от t до $t + \Delta t$, когда $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Величину v называют *мгновенной скоростью* точки в данный момент t.

Задача о касательной к данной кривой. Пусть на плоскости xOy кривая задана уравнением $y = f(x)$. Требуется провести касательную к данной кривой в данной точке $M_0(x_0, f(x_0))$. Так как точка касания M_0 дана, то для решения задачи потребуется найти угловой коэффициент искомой касательной, т. е. $\operatorname{tg}\varphi$ — тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox (рис. 3.1).

Через точки $M_0(x_0; f(x_0))$ и $M'(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ проведем секущую M_0M'. На рис. 3.1 видно, что угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ секущей M_0M' равен отношению

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

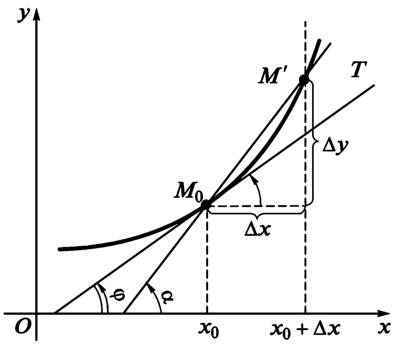


Рис. 3.1

Угловой коэффициент касательной M_0T к данной кривой в точке M_0 может быть найден на основании следующего определения: касательной к кривой в точке M_0 называется прямая M_0T, угловой коэффициент которой равен пределу углового коэффициента секущей M_0M', когда $\Delta x \to 0$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Определение производной. Математическая операция, требуемая для решения рассмотренных выше трех задач, одна и та же. Выясним аналитическую сущность этой операции, отвлекаясь от вызвавших ее конкретных процессов.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(a;\ b)$. Возьмем какое-нибудь значение x из $(a;\ b)$. Затем возьмем новое значение аргумента $x + \Delta x$ из этого промежутка, придав первоначальному значению x приращение Δx (положительное или отрицательное). Этому новому значению аргумента соответствует и новое значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, где

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Теперь составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Оно является функцией от Δx.

Если существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, то этот предел называется *производной* от функции $y = f(x)$ в данной точке x и обозначается через y' или $f'(x)$ (читается «игрек штрих» или «эф штрих от икс»):

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (3.1)$$

Для обозначения производной принят также и следующий символ $\frac{dy}{dx}$ (читается «дэ игрек по дэ икс»). Эту запись надо рассматривать пока как целый символ, а не как частное.

Если существует предел справа $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (или предел слева $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$), то он называется *правой* (или *левой*) производной функции $f(x)$ в точке x.

Действие нахождения производной функции называется ее *дифференцированием*, а функцию, имеющую производную в точке x, называют *дифференцируемой* в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке промежутка, называется *дифференцируемой* в этом промежутке. При этом если промежуток от a до b есть отрезок $[a; b]$, то в точке a речь идет о правой производной, а в точке b — о левой производной.

Пример 3.1. Найдите производную функции $y = C$, где C — постоянная. Имеем

$$y+\Delta y=C,\quad \Delta y=0,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=0,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

т.е. $y'=0$. Следовательно, производная постоянной равна нулю.

Пример 3.2. Найдите производную функции $y=x$. Имеем

$$y+\Delta y=x+\Delta x,\quad \Delta y=\Delta x,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=1,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,$$

т.е. $y'=1$.

Пример 3.3. Найдите производную функции $y=\sin x$. Имеем

$$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x),\quad \Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$$

(здесь используется формула (2.18) и непрерывность функции $\cos x$).

Из рассмотренных выше задач, приводящих к понятию производной, есть следствия.

1. *Скорость v прямолинейного движения есть производная пути s по времени t:* $v=\frac{ds}{dt}$. В этом состоит *механический* смысл производной.

2. *Угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x есть производная $f'(x)$.* В этом состоит *геометрический* смысл производной.

Пример 3.4. Точка движется по прямой по закону $s = t$, где s — путь (см), а t — время (с). Найдите скорость движения точки в момент $t = 3$.

Решение. Имеем $v = s' = 1$ (см. пример 3.2). В частности, при $t = 3$ $v = 1$ (см/с).

Пример 3.5. Найдите уравнение касательной и *нормали*[1] к кривой $y = x^2 + 1$ в точке A (1; 2).

Решение. Найдем производную функции $y = x^2 + 1$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x+\Delta x)^2+1)-(x^2+1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x+\Delta x) = 2x.$$

В точке касания A $x = 1$ и, следовательно, угловой коэффициент касательной $k_1 = 2$, а нормали $k_2 = -\frac{1}{2}$ (см. подразд. 1.2, п. 5). Поэтому (см. подразд. 1.2, п. 3) искомые уравнения запишутся в виде

$$y - 2 = 2(x-1), \quad y-2 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

или

$$y = 2x, \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Теорема 3.1. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Согласно формуле (3.1) и теореме 2.1 (см. подразд. 2.5, п. 1) имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ бесконечно малая. Отсюда $\Delta y = y'\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т.е. функция $y = f(x)$ непрерывна в данной точке x.

Примечание. Обратное утверждение уже не имеет места, что видно из следующего примера.

Пример 3.6. Функция $y = |x|$, график которой приведен на рис. 3.2, непрерывна в точке $x = 0$, но ясно, что в этой точке в соответствии с геометрическим смыслом производной функция $y = |x|$ не дифференцируема, так как в ней нет определенной касательной.

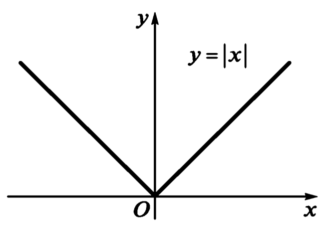


Рис. 3.2

[1] Т.е. прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к касательной к данной кривой в точке A.

3.2. Правила дифференцирования и производные элементарных функций

1. Вывод общих правил дифференцирования. Пусть u и v — две функции аргумента x, имеющие производные u' и v'.

Производная суммы. Пусть $y = u + v$. Тогда имеем

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v),$$

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

т. е.

$$y'=u'+v'$$

или

$$(u+v)'=u'+v'.$$

Пример 3.7. $(x+\sin x)'=(x)'+(\sin x)'=1+\cos x.$

Примечание. Правило дифференцирования суммы двух слагаемых распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых, что доказывается аналогично.

Производная произведения. Пусть $y = uv$. Тогда имеем

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)=uv+v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\,\Delta v,$$

$$\Delta y=v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\,\Delta v,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+\frac{\Delta v}{\Delta x}u+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=vu'+uv'+u'\cdot 0,^{1}$$

т. е.

$$y'=u'v+uv'$$

или

$$(uv)'=u'v+uv'. \tag{3.2}$$

Пример 3.8. $(x\sin x)'=(x)'\sin x+x(\sin x)'=\sin x+x\cos x.$

---

[1] Мы воспользовались здесь тем, что в силу непрерывности функции v (непрерывность следует из ее дифференцируемости) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$.

Вынесение постоянного множителя за знак производной. Так как $(c)' = 0$ (см. пример 3.1), то из формулы (3.1) непосредственно получаем

$$(cu)' = cu'.$$

Производная частного. Пусть $y = \frac{u}{v}$, где $v \neq 0$. Тогда имеем

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}, \quad \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{(v + \Delta v)v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v + \Delta v)v},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)v}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v)v} = \frac{vu' - uv'}{(v + 0)v},$$

т. е.

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

или

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример 3.9.

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{(x-1)'(x+1) - (x+1)'(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Производная сложной функции. Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, причем $f(u)$ имеет производную по u, а $\varphi(x)$ — по x. Тогда y будет сложной функцией от x. Требуется найти производную y по x. Имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ (предполагается, что Δu при достаточно малых значениях Δx не обращается в нуль), откуда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{3.3}$$

Пример 3.10. Найти производную от функции $y = \sin 3x$. Полагаем $u = 3x$, тогда $y = \sin u$ и, следовательно, по формуле (3.3) имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \sin u}{du} \cdot \frac{d(3x)}{dx} = (\cos u)3 = 3\cos 3x.$$

Примечание. При достаточном навыке промежуточную переменную u не пишут, вводя ее лишь мысленно.

Производная обратной функции. Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ взаимно обратные функции. Тогда если функция $y = f(x)$ имеет не равную нулю производную $f'(x)$, то обратная функция имеет производную $\varphi'(y)$ и

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

или, короче,

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{3.4}$$

Действительно, так как $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции, то $x = \varphi[f(x)]$. Отсюда, используя формулу (3.3) дифференцирования сложной функции, получаем

$$1 = \varphi'(y) f'(x),$$

откуда и следует искомая формула (3.4).

2. Производные элементарных функций. Пусть u, как и выше, — функция аргумента x, имеющая производную u'.

Производные тригонометрических функций. Как установлено ранее (см. пример 3.3),

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Отсюда с учетом формулы (3.3)

$$(\sin u)' = u' \cos u. \tag{3.5}$$

На основании формулы (3.5) имеем

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Отсюда с учетом (3.3) получаем

$$(\cos u)' = -u' \sin u.$$

Далее имеем

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отсюда с учетом формулы (3.3)

$$(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}. \tag{3.6}$$

Используя формулу (3.6), находим

$$(\mathrm{ctg}\, x)' = \left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отсюда с учетом (3.3)

$$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

Производная логарифма. Пусть $y = \ln x$. Тогда имеем

$$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x),\ \Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\frac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Пользуясь известным пределом $e = \lim\limits_{z \to 0}(1 + z)^{\frac{1}{z}}$ (см. подразд. 2.3, примечание), будем иметь

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}, \quad \text{т.е. } y' = \frac{1}{x}$$

или

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{3.7}$$

Пусть теперь $y = \log_a x \, (a > 0, a \neq 1)$. Тогда $a^y = x$. Отсюда $y \ln a = \ln x$ или $y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, откуда согласно (3.7)

$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

или

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{3.8}$$

Из формул (3.7), (3.8) с учетом формулы (3.3) получаем

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \tag{3.9}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}.$$

В частности,

$$(\lg u)' = (\log_{10} u)' = \frac{u'}{u \ln 10}.$$

Пример 3.11. $y = \ln \cos x,\ y' = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\mathrm{tg}\, x.$

Производная степенной функции. Пусть $y = x^\alpha$ (α — действительное число и $x > 0$). Тогда $\ln y = \alpha \ln x$, и согласно формуле (3.9) $\dfrac{y'}{y} = \alpha \dfrac{1}{x}$. Отсюда $y' = \alpha y \dfrac{1}{x} = \alpha x^\alpha \dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$, т. е.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{3.10}$$

Формула (3.10) верна и в случае, когда функция $y = x^\alpha$ определена на всей числовой оси (например, когда α — натуральное число). Из формулы (3.10) с учетом формулы (3.3) получаем

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'. \tag{3.11}$$

Пример 3.12. Если $y = \sqrt{\sin x}$, то $y' = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

Производная показательной функции. Пусть $y = a^u$ $(0 < a \neq 1)$. Тогда $\ln y = u \ln a$, и согласно формулам (3.9), (3.11) $\dfrac{y'}{y} = u' \ln a$. Отсюда $y' = yu' \ln a = a^u u' \ln a$, т. е.

$$(a^u)' = a^u u' \ln a.$$

В частности,

$$(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u u'.$$

Пример 3.13. Если $y = 2^{x^2}$, то $y' = 2^{x^2} 2x \ln 2 = 2^{x^2+1} x \ln 2$.

Производные обратных тригонометрических функций. Функция $y = \arcsin x$ является обратной по отношению к функции $x = \sin y$. Поэтому по правилу дифференцирования обратной функции получаем

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким же приемом получаем

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{+\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < y < \pi),$$

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg}\, y)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\mathrm{arcctg}\, x)' = \frac{1}{(\mathrm{ctg}\, y)'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{\mathrm{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Отсюда с учетом (3.3) получаем

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}; \quad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Пример 3.14. $(\operatorname{arctg} x^2)' = \dfrac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} = \dfrac{2x}{1+x^4}.$

Для удобства нахождения производных различных функций сведем все правила и формулы дифференцирования в одну таблицу.

Правила дифференцирования и производные основных элементарных функций

1. $(C)' = 0.$
2. $(u+v)' = u' + v'.$
3. $(uv)' = u'v + uv'.$
4. $(Cu)' = Cu'.$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}.$
6. $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}.$
7. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'.$
8. $(a^u)' = a^u u' \ln a.$
9. $(e^u)' = e^u u'.$
10. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}.$
11. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}.$
12. $(\sin u)' = u' \cos u.$
13. $(\cos u)' = -u' \sin u.$
14. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}.$
15. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}.$
16. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$
17. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$
18. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}.$
19. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}.$

Здесь $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции; $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции, причем $y = f(x)$ имеет не равную нулю производную.

3.3. Дифференциал функции

1. Понятие дифференциала. Из определения производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

с учетом теоремы 2.1 получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \tag{3.12}$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Умножим обе части равенства (3.12) на Δx:

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Пусть $y' \neq 0$. Тогда первое слагаемое $y'\Delta x$ линейно по Δx, поскольку y' не зависит от Δx. При $\Delta x \to 0$ это слагаемое бесконечно мало, но порядок его малости ниже порядка малости второго слагаемого, так как для всех значений $y' \neq 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{y'\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{y'} = 0.$$

Поэтому слагаемое $y'\Delta x$ является главной частью приращения функции. Это слагаемое называют *дифференциалом* функции $y = f(x)$ и обозначают символом dy или $df(x)$. Итак, $dy = y'\Delta x$.

2. Геометрический смысл дифференциала. Для выяснения геометрического смысла дифференциала к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x; y)$ проведем касательную MT, обозначив через φ ее угол наклона к положительному направлению оси Ox (рис. 3.3).

Так как $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$, то $dy = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$. Поэтому из треугольника MLN следует, что дифференциал dy есть приращение ординаты касательной, соответствующее приращению аргумента Δx.

Замечая, что $dx = x'\Delta x = \Delta x$, т.е. что дифференциал независимой переменной равен ее приращению, получаем

$$dy = y'dx. \tag{3.13}$$

Таким образом, дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал (или приращение) независимой переменной.

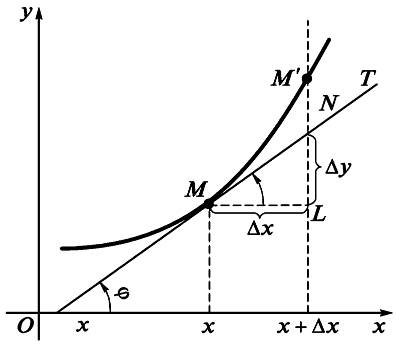


Рис. 3.3

Из (3.13) имеем

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

т. е. производная функции равна отношению дифференциала этой функции к дифференциалу аргумента.

Это оправдывает введенное ранее обозначение производной $\frac{dy}{dx}$.

Ввиду общности операций нахождения производной и дифференциала обе они носят название дифференцирования.

3. Дифференциал сложной функции. Найдем выражение для дифференциала сложной функции. Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, причем $f(u)$ имеет производную по u, $\varphi(x)$ — по x. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u)\varphi'(x).$$

Следовательно,

$$dy = f'_u(u)\varphi'(x)dx.$$

Но

$$\varphi'(x)dx = du.$$

Поэтому

$$dy = f'_u(u)du.$$

Таким образом, дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент ее был независимой переменной. Иначе говоря, форма записи дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Это свойство дифференциала называется *инвариантностью формы дифференциала*.

Пример 3.15. Найти du сложной функции

$$y = \sin u, \quad u = \sqrt{x}.$$

Имеем

$$dy = \cos u\,du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos u\,dx.$$

4. Таблица формул для дифференциалов. Согласно формуле (3.13) для получения дифференциала нужно умножить производную на дифференциал независимой переменной dx. Это позволяет нам из таблицы формул для производных сразу получить соответствующую таблицу формул для дифференциалов. Например, из формулы

$$(u + v)' = u' + v',$$

умножив обе части на dx, получим

$$(u+v)'dx = u'dx + v'dx$$

или

$$d(u+v) = du + dv.$$

Таблица дифференциалов

1. $dC = 0$.

2. $d(u+v) = du + dv$.

3. $d(uv) = vdu + udv$.

4. $d(Cu) = Cdu$.

5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

6. $d(u^\alpha) = \alpha u^{\alpha-1}du$.

7. $d(a^u) = a^u \ln a du$.

8. $d(e^u) = e^u du$.

9. $d(\log_a u) = \frac{du}{u \ln a}$.

10. $d(\ln u) = \frac{du}{u}$.

11. $d(\sin u) = \cos u du$.

12. $d(\cos u) = -\sin u du$.

13. $d(\mathrm{tg} u) = \frac{du}{\cos^2 u}$.

14. $d(\mathrm{ctg} u) = -\frac{du}{\sin^2 u}$.

15. $d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

16. $d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

17. $d(\mathrm{arctg} u) = \frac{du}{1+u^2}$.

18. $d(\mathrm{arcctg} u) = -\frac{du}{1+u^2}$.

Здесь $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции.

5. Применение дифференциала для приближенных вычислений. Мы выяснили, что приращение функции Δy отличается от дифференциала dy на бесконечно малую $\alpha\Delta x$ более высокого порядка, чем $y'\Delta x$. Следовательно, для малых $|\Delta x|$

$$\Delta y \approx dy$$

или

$$\Delta y \approx y'\Delta x. \tag{3.14}$$

Равенство (3.14) может быть применено для приближенного подсчета приращения функции, так как согласно этой формуле вычисление приращения функции сводится к вычислению производной функции, что представляет собой обычно более простую задачу.

Пример 3.16. Ребро куба длиной 30 см увеличено на 0,1 см. Требуется определить величину изменения объема этого куба.

Р е ш е н и е. Обозначая ребро куба через x, имеем для объема $v = x^3$. Отсюда $dv = 3x^2\Delta x$. В нашем случае $\Delta x = 0{,}1$ и, значит, $dv = 3 \cdot 900 \cdot 0{,}1 = 270$. Следовательно, $\Delta v \approx 270$ (см^3).

С помощью замены приращения функции ее дифференциалом решается также задача нахождения приближенного значения функции $f(x+\Delta x)$ по ее значению $f(x)$. Действительно,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Отсюда

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{3.15}$$

Пример 3.17. Вычислить $\sqrt{16{,}02}$.

Р е ш е н и е. Взяв функцию $f(x) = \sqrt{x}$, имеем $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Теперь, полагая $x = 16, \Delta x = 0{,}02$, получаем

$$\sqrt{16{,}02} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0{,}02 = 4 + \frac{1}{8} \cdot 0{,}02 = 4 + 0{,}0025 = 4{,}0025.$$

Формула (3.15) служит источником многих формул приближенных вычислений.

Пример 3.18. Если $y = \sqrt[m]{x}$, $m = 2, 3, \ldots$, то $y' = \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{\sqrt[m]{x}}{x}$ и согласно (3.15) при малых значениях $|\Delta x|$ имеем

$$\sqrt[m]{x+\Delta x} \approx \sqrt[m]{x} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\sqrt[m]{x}}{x}\Delta x.$$

В частности, при $x = 1$

$$\sqrt[m]{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{\Delta x}{m}.$$

Пример 3.19. Если $y = \sin x$, то, как и в предыдущем примере, при малых значениях $|\Delta x|$ получаем $\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x \Delta x$. В частности, при $x = 0$ $\sin \Delta x \approx \Delta x$.

Пример 3.20. Если $y = \ln x$, то, как и выше, при малых значениях $|\Delta x|$ получаем $\ln(x+\Delta x) \approx \ln x + \dfrac{\Delta x}{x}$. В частности, при $x = 1$ $\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x$.

3.4. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Производные высших порядков. Производная $y' = f'(x)$ данной дифференцируемой функции $y = f(x)$, называемая *производной первого порядка*, представляет собой некоторую новую функцию. Возможно, что эта функция сама имеет производную. Тогда производная от производной первого порядка называется *производной второго по-*

рядка или *второй производной* и обозначается так: $y'' = (y')'$ или $f''(x)$. Аналогично, если существует производная от производной второго порядка, она называется *производной третьего порядка* или *третьей производной* и обозначается так: $y''' = (y'')'$ или $f'''(x)$ и т.д.

Вообще производная от производной порядка $n - 1$ называется *производной n порядка* и обозначается $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывно дифференцируемой n раз*, если существуют ее производные до порядка n включительно и эти производные непрерывны.

Производные четвертого, пятого и более высоких порядков обозначают также с помощью римских цифр: $y^{\mathrm{IV}}, y^{\mathrm{V}}, y^{\mathrm{VI}}$ и т.д. В таком случае порядок производной можно писать без скобок.

Пример 3.21.

1) $y = x^k, y' = kx^{k-1}, y'' = k(k-1)x^{k-2}, \ldots, y^{(n)} = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)x^{k-n}$; если k — натуральное число, то $y^{(k)} = k!$ и $y^{(k+1)} = y^{(k+2)} = \ldots = 0$;

2) $y = \mathrm{e}^{kx}, y' = k\mathrm{e}^{kx}, y'' = k^2\mathrm{e}^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^n\mathrm{e}^{kx}$;

3) $y = a^x, y' = a^x \ln a, y'' = a^x \ln^2 a, \ldots, y^{(n)} = a^x \ln^n a$;

4) $y = \ln x, y' = \dfrac{1}{x}, y'' = -\dfrac{1}{x^2}, \ldots, y^{(n)} = \dfrac{(-1)(-2)\ldots(-n+1)}{x^n} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$;

5) $y = \sin x, y' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right), y'' = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\dfrac{\pi}{2}\right), \ldots,$

$y^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right).$

Совершенно аналогично устанавливается формула

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

На случай производных любого порядка легко обобщаются правила дифференцирования суммы и вынесения постоянного множителя за знак производной (см. подразд. 3.2, п. 1):

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}.$$

Выведем теперь формулу, дающую возможность вычислить производную n-го порядка от произведения двух функций uv. Применяя правила дифференцирования произведения и суммы, получаем

$$y' = u'v + uv',$$

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + u'v'' + uv''' + 2u'v'' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Продолжая процесс дифференцирования, придем к следующей формуле:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots \cdot k}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)},$$

называемой формулой Лейбница[1].

Пример 3.22. Если $u = e^x$, $v = x^2$, то по формуле Лейбница получим

$$(e^x x^2)^{(20)} = e^x x^2 \quad 20 e^x \quad 2x \cdot 190 e^x \quad 2 \quad e^x (x^2 \quad 40x \quad 380). \ +$$

2. Физический смысл второй производной. Пусть $s = s(t)$ — уравнение прямолинейного движения материальной точки. Как установлено ранее (см. подразд. 3.1, п. 1, 2), мгновенная скорость v этого движения есть производная пути s по времени t, т.е. $v = \frac{ds}{dt}$. Если теперь эту скорость рассматривать как функцию времени, то так же, как и в п. 1 (см. подразд. 3.1), установим, что $\frac{dv}{dt}$ есть ускорение a в момент t. Таким образом, получаем, что $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$, т.е. вторая производная пути s по времени t есть ускорение a движущейся точки в момент t. В этом и заключается *физический* смысл второй производной.

Пример 3.23. Точка движется по прямой по закону $s = t^3$, где s — путь (см), а t — время (с). Найти скорость и ускорение движения точки в момент $t = 2$ с.

Р е ш е н и е. Имеем $v = s' = 3t^2, a \quad s'' = 6t$.

Тогда, при $t = 2$ с $v = 12$ см/с и $a = 12$ см/с^2.

3. Дифференциалы высших порядков. Пусть имеем функцию $y = f(x)$, где x — независимая переменная. Ее дифференциал

$$dy = f'(x)dx$$

есть некоторая функция от x, но от x может зависеть только первый сомножитель $f'(x)$, второй же сомножитель является приращением независимой переменной x и от значения этой переменной не зависит. Так как dy есть функция от x, то мы имеем право говорить о дифференциале этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции называется ***дифференциалом второго порядка*** или ***вторым дифференциалом*** этой функции и обозначается через $d^2 y$,

$$d(dy) = d^2 y.$$

Найдем выражение второго дифференциала. В силу определения дифференциала имеем

$$d^2 y = (f'(x)dx)'dx.$$

Так как dx от x не зависит, то dx при дифференцировании выносится за знак производной и мы получаем

$$d^2 y = f''(x)(dx)^2.$$

---

[1] Готфрид Лейбниц (1646 — 1716) — немецкий философ и математик.

Принято, записывая степень дифференциала, опускать скобки; так, например, вместо $(dx)^2$ принято писать dx^2, подразумевая под этим квадрат выражения dx, вместо $(dx)^3$ пишут dx^3 и т.д.

Дифференциалом третьего порядка или *третьим дифференциалом* функции называется дифференциал от ее второго дифференциала:

$$d^3y = d(d^2y) = (f''(x)dx^2)'dx = f'''(x)dx^3.$$

Вообще *дифференциалом n-го порядка* называется первый дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = (f^{(n-1)}(x)dx^{n-1})'dx = f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (3.16)$$

Отсюда получается другая запись для n-й производной:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \qquad (3.17)$$

Примечание. Равенства (3.16) и (3.17) (при $n > 1$) верны, вообще говоря, лишь для того случая, когда x является независимой переменной. Действительно, пусть имеем сложную функцию

$$f = f(u), u = \varphi(x).$$

Тогда (см. подразд. 3.3, п. 3)

$$dy = f'_u(u)du. \qquad (3.18)$$

Далее, используя формулу (3.18), получаем

$$d^2y = d(f'_u(u)du).$$

Но здесь $du = \varphi'(x)dx$, вообще говоря, зависит от x, и потому получаем в силу формулы для дифференциала произведения (см. подразд. 3.3, п. 4)

$$d^2y = d(f'_u(u))du + f'_u(u)d(du),$$

или

$$d^2y = f''_{u^2}(u)(du)^2 + f'_u(u)d^2u,$$

где

$$d^2u = u''(x)dx^2.$$

Аналогично находятся d^3y и т.д.

Таким образом, второй и последующие дифференциалы не обладают, вообще говоря, свойством инвариантности формы (см. подразд. 3.3, п. 3).

3.5. Параметрическое задание функции и ее дифференцирование

Будем говорить, что переменная y как функция аргумента x задана *параметрически*, если обе переменные x и y заданы как функции некоторой третьей переменной t: $x = \varphi(t)$, y $\psi(t)$. При этом указанную переменную t обычно называют *параметром*.

Пример такого задания функций уже встречался (см. подразд. 1.4, п.1) при рассмотрении параметрических уравнений окружности, дающих выражения текущих координат x и y в виде функций от параметра t.

Будем предполагать, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют нужное число производных по параметру t в рассматриваемом промежутке изменения этого параметра. Кроме того, будем считать также, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$, что позволяет рассматривать переменную y как функцию переменной x.

Рассмотрим вопрос о вычислении производных функции $y = y(x)$ по аргументу x. Имеем (в силу инвариантности формы первого дифференциала; см. подразд. 3.3, п. 3)

$$y'(x) = \frac{dy}{dx},$$
$$dy = \psi'(t)dt, \quad dx = \varphi'(t)dt. \tag{3.19}$$

Отсюда следует, что

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{3.20}$$

Для вычисления второй производной $y''(x)$ представим ее (в силу инвариантности формы первого дифференциала) в виде

$$y''(x) = \frac{d(y'(x))}{dx}. \tag{3.21}$$

Теперь, используя в правой части (3.21) формулу (3.20), третью из формул (3.19) и правило дифференцирования частного, получаем

$$y''(x) = \frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)' dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}. \tag{3.22}$$

По такому же принципу вычисляются производные третьего и последующих порядков.

Пример 3.24. Вычислить первую и вторую производные функции $y(x)$, заданной параметрически:

$$x = R\cos t,$$
$$y = R\sin t.$$

Пользуясь формулами (3.20) и (3.22), получаем

$$y'(x) = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \quad y''(x) = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'}{-R\sin t} = -\frac{1}{R\sin^3 t}.$$

3.6. Свойства дифференцируемых функций

1. Теорема Ферма[1]**.** *Если функция $y = f(x)$, определенная в интервале $(a;\ b)$, достигает в некоторой точке с этого интервала наибольшего (или наименьшего) значения и существует производная $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Допустим, что в точке c функция $f(x)$ достигает наибольшего значения. Придадим значению c достаточно малое приращение Δx. Тогда $f(c+\Delta x) < f(c)$. Отсюда при $\Delta x < 0$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0$, и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c) \geq 0. \tag{3.23}$$

При $\Delta x > 0$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c) \leq 0. \tag{3.24}$$

Из неравенств (3.23) и (3.24) следует, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл заключения теоремы состоит в том, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой c параллельна оси абсцисс.

2. Теорема Ролля[2]**.** *Если функция $y = f(x)$, непрерывная на сегменте $[a,\ b]$ и дифференцируемая в интервале $(a,\ b)$, принимает на концах этого сегмента равные значения $f(a) = f(b)$, то в интервале $(a,\ b)$ существует точка c такая, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то, как известно, она принимает на этом сегменте как свое наибольшее значение M, так и свое наименьшее значение m. Возможны только два случая.

1. $M = m$. Тогда $f(x)$ постоянна на $[a;\ b]$: в самом деле, неравенство $m \leq f(x) \leq M$ в этом случае дает $f(x) = M$ для всех x из $[a;\ b]$. Поэтому в любой точке интервала $(a;\ b)$ $f'(x) = 0$.

2. $M > m$. Так как $f(a) = f(b)$, то хоть одно из значений M и m достигается в некоторой точке c $(a < c < b)$. Следовательно, согласно теореме Ферма $f'(c) = 0$. Теорема доказана.

Геометрически теорема Ролля означает следующее: если крайние ординаты кривой $y = f(x)$ равны, то на кривой найдется точка, где касательная параллельна оси абсцисс (рис. 3.4).

---

[1] Пьер Ферма (1601 — 1665) — французский математик.

[2] Мишель Ролль (1652— 1719) — французский математик.

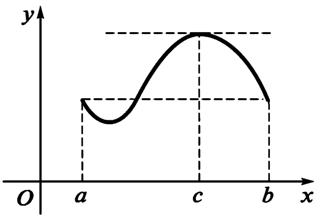


Рис. 3.4

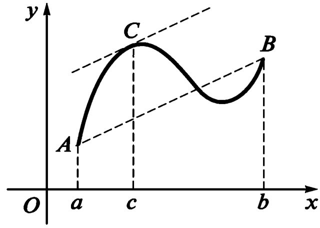


Рис. 3.5

3. Теорема Лагранжа[1]. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$ и дифференцируема в интервале $(a; b)$, то в интервале $(a; b)$ найдется такая точка c, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{3.25}$$

Доказательство. Положим

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lambda \tag{3.26}$$

и рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a)$. Эта функция удовлетворяет первым двум условиям теоремы Ролля как алгебраическая сумма трех непрерывных и дифференцируемых функций. При этом $\varphi(a) = \varphi(b)$ 0. Следовательно, к функции $\varphi(x)$ применима теорема Ролля, т.е. существует точка c, $a < c < b$, такая, что $\varphi'(c) = 0$. Но $\varphi'(x) = f'(x) - \lambda$. Поэтому $f'(c) - \lambda = 0$, или $\lambda = f'(c)$. Отсюда получаем искомое равенство (3.25).

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл (рис. 3.5): на графике функции $y = f(x)$ между точками A и B есть внутренняя точка C такая, что касательная к нему в точке C параллельна хорде AB. В самом деле, левая часть равенства (3.25) — угловой коэффициент хорды AB, а правая — угловой коэффициент касательной к графику в точке C.

Примечание. Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля, так как если $f(a) = f(b)$, то из равенства (3.25) следует $f'(c) = 0$.

Формула (3.25) называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений. Из нее получаем $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Наконец, взяв вместо a и b соответственно x_0 и x и обозначив $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, формулу Лагранжа запишем

$$\Delta y = f'(c)\Delta x.$$

Из теоремы Лагранжа вытекает следствие.

Следствие. Если $f'(x) = 0$ в интервале (a, b), то в этом интервале функция $f(x)$ постоянна.

[1] Жозеф-Луи Лагранж (1736—1813) — французский математик и механик.

Доказательство. Для любых значений x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) из рассматриваемого интервала выполняется теорема Лагранжа, т. е. $f(x_2) - f(x_1) = = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < c < x_2$. Но $f'(c) = 0$, а потому и $f(x_2) - f(x_1) = 0$, т. е. $f(x_1) = f(x_2)$, а это означает, что $f(x) = \text{const}$ в интервале $(a,\ b)$.

4. Правило Лопиталя[1]**.** В гл. 2 мы познако-мились с некоторыми приемами нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших, т. е. раскрытия неопределенности соответственно вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Здесь будет рассмотрен новый простой прием для раскрытия этих неопределенностей, называемый *правилом Лопиталя*. Рассмотрим отношение

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

где функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, исключая, быть может, саму точку a. Пусть далее эти функции одновременно являются бесконечно малыми или бесконечно большими.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если последний существует, т. е.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Пример 3.25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(2^x-1)'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{\cos x}\quad \ln 2. \qquad =$

Пример 3.26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}\quad 1. \qquad =$

Иногда правило Лопиталя приходится применять несколько раз.

Пример 3.27. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2}\quad \frac{1}{2}. \qquad =$

Примечание. Правило Лопиталя верно и в том случае, когда a — символ ∞.

Пример 3.28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}\quad 0. \qquad =$

Случаи других неопределенностей ($0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$) с помощью тождественных преобразований сводятся к основным типам неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

---

[1] Гильом Лопиталь (1661 — 1704) — французский математик.

Пример 3.29. $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$.

Здесь мы имеем неопределенность $0\cdot\infty$. Переписывая данное выражение в виде

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}},$$

получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Отсюда, применяя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+0} x = 0.$$

Пример 3.30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

Данное выражение представляет собой неопределенность вида $\infty-\infty$. Используя, что $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}.$$

Так как получилась неопределенность $\frac{0}{0}$, то применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x}\right) = -\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = -\frac{0}{2} = 0.$$

Пример 3.31. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$. Здесь неопределенность вида 0^0. Положив $y = x^x$, имеем

$$\ln\lim_{x\to 0+0} y = \lim_{x\to 0+0}\ln y = \lim_{x\to 0+0} x\ln x = 0.$$

Следовательно, $\ln\lim\limits_{x\to 0+0} y = 0$, откуда

$$\lim_{x\to 0+0} y = e^0 = 1, \text{ т.е. } \lim_{x\to 0+0} x^x = 1.$$

Использовавшийся в последнем примере прием логарифмирования применяется также и в случае неопределенностей $\infty^0, 1^\infty$.

3.7. Возрастание и убывание функций. Максимумы и минимумы. Асимптоты

1. Возрастание и убывание функций. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в интервале $(a;b)$, если, каковы бы ни были значения x_1 и x_2 из этого интервала, из неравенства $x_2 > x_1$ вытекает неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ (соответственно $f(x_2) < f(x_1)$). Если же для таких x_1 и x_2 из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$ ($f(x_2) \leq f(x_1)$), то функция $f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на $(a; b)$.

Функции всех этих типов носят общее название *монотонные*.

Монотонные функции часто встречаются в различных исследованиях. Высота растущего дерева, например, или вес созревающего зерна — это монотонно неубывающие функции времени; освещенность, меняющаяся по мере удаления от источника света, — монотонно убывающая функция расстояния.

Разумеется, существуют и не монотонные функции. Например, температура воздуха в течение года — не монотонная функция времени, хотя на протяжении нескольких часов она может быть и монотонной, повышаясь к полудню или понижаясь к вечеру.

Теорема 3.3. *Если функция $y = f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a; b)$, неубывающая (невозрастающая) на нем, то ее производная в этом интервале не отрицательна (не положительна)*, т.е.

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0).$$

Доказательство. Пусть x — произвольное значение из интервала $(a; b)$. Придадим этому значению x приращение Δx, такое, чтобы точка $x + \Delta x$ принадлежала интервалу $(a; b)$. Если $f(x)$ неубывающая функция, то $\Delta y \geq 0$ при $\Delta x > 0$ и $\Delta y \leq 0$ при $\Delta x < 0$. В обоих случаях $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ и, следовательно, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 0. Если же $f(x)$ невозрастающая функция, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ и $f'(x) \leq 0$.

Теорема 3.4. *Если функция $f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a; b)$, удовлетворяет в нем условию $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то эта функция возрастает (убывает) в интервале $(a; b)$.*

Доказательство. Согласно формуле Лагранжа для произвольных x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) из $(a; b)$ имеем $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < c < x_2$. Следовательно, если $f'(x) > 0$ в $(a; b)$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$ и заданная функция возрастает в $(a; b)$. Если же $f'(x) < 0$ в $(a; b)$ то $f(x_2) - f(x_1) < 0$ или $f(x_2) < f(x_1)$ и данная функция убывает.

Приведем несколько примеров исследования функции на возрастание и убывание.

Пример 3.32. Функция $y = e^x$ всюду возрастает, так как $y' = e^x$ 0 для всех x.

Пример 3.33. Функция $y=x^2$ убывает в промежутке $(-\infty, 0)$, так как в этом промежутке $y'=2x$ 0.<Эта же функция в промежутке $(0, +\infty)$ возрастает, так как в последнем промежутке $y'=2x$ 0.>

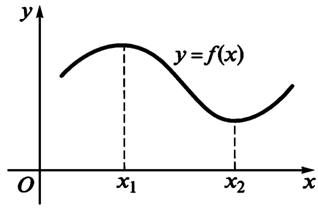


Рис. 3.6

2. Максимумы и минимумы функций. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *максимум* (*минимум*), если существует такая окрестность точки x_0 $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, что для всех x из этой окрестности, отличных от x_0, выполняется неравенство

$$f(x)<f(x_0) \quad (f(x)>f(x_0)).$$

Иначе говоря, функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум), если для достаточно малого приращения Δx (любого знака) выполняется неравенство

$$f(x_0+\Delta x)<f(x_0) \quad (f(x_0+\Delta x)>f(x_0)).$$

Максимум или минимум функции называют *экстремумом* функции.

По определению максимумов и минимумов функции они могут достигаться лишь внутри области определения, концы сегментов области определения не могут служить точками, в которых функция принимает экстремум.

На рис. 3.6 изображен график функции, которая имеет в точке x_1 максимум, а в точке x_2 минимум.

Если исследуемая на экстремум функция дифференцируема, то изучение свойств ее производной дает возможность находить точки, в которых функция имеет экстремум.

Теорема 3.5 (необходимое условие существования экстремума). ***Если функция $f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a; b)$, имеет в точке x_0, $a<x_0<b$, экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю:***

$$f'(x_0)=0. \tag{3.27}$$

Эта теорема есть непосредственное следствие из теоремы Ферма.

Примечание. Условие (3.27), будучи необходимым условием экстремума, не является достаточным условием экстремума, что показывает следующий пример.

Пример 3.34. Функция $f(x)=x^3$ не имеет экстремума в точке $x_0=0$ (разность $f(x)-f(0)$ меняет знак при изменении знака аргумента x), хотя ее производная $y'=3x^2$ обращается в этой точке в нуль.

Теорема 3.6 (достаточное условие существования экстремума). ***Если производная функции $f(x)$ обращается в точке x_0 в нуль (такие точки называются стационарными) и при переходе через эту точку в направлении возрастания x меняет знак плюс (минус) на минус (плюс), то в точке x_0 эта функция имеет максимум (минимум). Если же при переходе через точку x_0 производная функции $f(x)$ не меняет знака, то в этой точке функция $f(x)$ экстремума не имеет.***

Доказательство. Допустим, что $f'(x)$ меняет знак «плюс» на «минус». Тогда согласно теореме 3.4 в достаточно малой окрестности точки x_0 слева от x_0 функция $f(x)$ возрастает и $f(x) < f(x_0)$, а справа от нее функция $f(x)$ убывает и снова $f(x) < f(x_0)$. Следовательно, для всех x из достаточно малой окрестности точки x_0 (кроме самой этой точки) будет выполняться неравенство $f(x) < f(x_0)$, т.е. в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум.

Аналогичное доказательство и в случае обратной смены знака. Предположим теперь, что при переходе через точку x_0 производная функции $f(x)$ не меняет знака. Тогда по теореме 3.4 как слева, так и справа от x_0 функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает и, следовательно, не может иметь экстремума в точке x_0.

Отсюда следует такое *правило исследования функции на экстремум* с помощью первой производной. Пусть в интервале $(a;b)$ дана дифференцируемая функция $f(x)$:

1) находим ее производную $f'(x)$;
2) находим корни уравнения $f'(x) = 0$;
3) выясняем знак $f'(x)$ слева и справа от каждого из этих корней и согласно теореме 3.4 выносим заключение об экстремуме;
4) вычисляем значения функции в точках экстремума.

Пример 3.35. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = e^x - x$. Для этого находим: $f'(x) = e^x - 1$. Приравнивая ее к нулю, получаем $e^x - 1 = 0$, откуда $x = 0$. Так как для $x < 0$ $e^x - 1 < 0$, а для $x > 0$ $e^x - 1 > 0$, то в точке $x = 0$ данная функция имеет минимум, причем $f(0) = 1$.

Пример 3.36. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Для этого вычисляем производную $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$ и находим корни уравнения $f'(x) = 0$. Имеем $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Затем согласно полученному правилу последовательно заполняем строки таблицы:

x	$x < -1$	$x_1 = -1$	$-1 < x < 1$	$x_2 = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$		Максимум $f(x_1) = 4$		Минимум $f(x_2) = 0$	

Пример 3.37. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3 + 2$. Имеем $f'(x) = 3x^2 = 0$, откуда $x = 0$. Так как при $x < 0$ и $x > 0$ $f'(x) > 0$, то функция $f(x) = x^3 + 2$ в точке $x = 0$ экстремума не имеет.

3. Исследование функций на экстремум с помощью второй производной. Следующая теорема является вторым достаточным условием существования экстремума.

> ***Теорема 3.7.*** *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и ее окрестности непрерывные первую и вторую производные, причем $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум (максимум), если $f''(x_0)>0\,(f''(x_0)<0)$.*

Доказательство. Пусть $f''(x_0)>0$. Так как $f''(x)$ непрерывна в точке x_0, то (см. подразд. 2.6, п. 1) $f''(x)>0$ и в некоторой окрестности точки x_0. В этой окрестности точки x_0 функция $z=f'(x)$ возрастает, так как $z'=f''(x)>0$. Но $f'(x_0)=0$. Следовательно, при переходе через точку x_0 в направлении возрастания $f'(x)$ меняет знак минус на плюс и потому, согласно теореме 3.6, $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум. Доказательство в случае $f''(x_0)<0$ аналогично.

Эта теорема позволяет сформулировать *второе правило* отыскания экстремума функции, в котором меняется лишь п. 3). Этот пункт заменяется на следующее:

находим вторую производную $f''(x)$, вычисляем ее значения для каждого из найденных корней уравнения $f'(x)=0$ и согласно только что доказанной теореме выносим заключение об экстремуме.

Заметим, что пользоваться вторым правилом обычно проще, чем первым. Но если вторая производная в корне первой производной обращается в нуль, то используют первое правило отыскания экстремума.

Пример 3.38. Применим второе правило отыскания экстремума для рассмотренной выше функции $f(x)=e^x-x$. Имеем $f'(0)=0, f''(x)=e^x$, $f''(0)=1>0$, следовательно, $x=0$ дает минимум, т.е. приходим к тому же результату.

4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\,b]$. Тогда на этом отрезке функция $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значений. Остановимся для определенности на наибольшем значении. Если эта функция достигает наибольшего значения в интервале $(a;\,b)$, то оно, очевидно, будет максимумом функции $f(x)$. Но функция может достигать своего наибольшего значения также на одном из концов отрезка $[a;\,b]$ (см. рис. 2.18). Таким образом, чтобы найти наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;\,b]$, надо найти на интервале $(a;\,b)$ все максимумы этой функции, затем вычислить значения функции $f(x)$ на концах отрезка $[a;\,b]$, т.е. $f(a)$ и $f(b)$. Наибольшее из всех этих чисел и будет наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;\,b]$. Аналогично для нахождения наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;\,b]$ надо найти все минимумы этой функции на интервале $(a;\,b)$, затем вычислить $f(a)$ и $f(b)$. Наименьшее из всех этих чисел и будет наименьшим значением функции на отрезке $[a;\,b]$.

Пример 3.39. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ на отрезке $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$.

Исследуем эту функцию на экстремум:

$$f'(x)=6x^2-18x+12,$$

$$6x^2-18x+12=0$$

или

$$x^2-3x+2=0,$$

откуда $x_1=1, x_2=2$. Так как $f''(x)=12x-18$, то $f''(1)=-6<0$ и $f''(2)=6>0$. Следовательно, при $x = 1$ функция $f(x)$ имеет максимум, причем $f(1) = 2$, а при $x = 2$ эта функция имеет минимум, причем $f(2) = 1$. Находим далее значения функции $f(x)$ на концах отрезка $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$:

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{57}{32};\quad f(3)=6.$$

Таким образом, наибольшее значение рассматриваемой функции на отрезке $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$ есть 6, а наименьшее — равно 1.

Замечание. Очевидно, если непрерывная на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемая в интервале $(a; b)$ функция имеет в интервале (a, b) только одну стационарную точку и экстремум в ней, то в этой точке она имеет наибольшее значение в случае максимума и наименьшее в случае минимума.

5. Задачи на экстремум. Теория экстремума функции имеет многочисленные практические применения.

1. Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединенных сопротивлений. При каком соотношении между этими сопротивлениями сопротивление всей цепи максимально, если при последовательном соединении этих сопротивлений оно равно R?

Решение. Пусть r — сопротивление электрической цепи, состоящей из двух параллельно соединенных сопротивлений x и y. Тогда

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{r}.$$

Из условия задачи имеем

$$x+y=R.$$

Из последних двух равенств получаем

$$r=\frac{x(R-x)}{R}\equiv r(x).$$

Очевидно, $0<x<R$. Производная $r'=\frac{R-2x}{R}$ обращается в нуль в единственной точке $x=\frac{R}{2}$. Это значение и доставляет r макси-

мальное значение, так как при любом достаточно малом положительном числе h

$$r'\left(\frac{R}{2}-h\right)=\frac{2h}{R}>0 \text{ и } r'\left(\frac{R}{2}+h\right)=-\frac{2h}{R}<0[1],$$

т. е. при переходе через точку $x=\frac{R}{2}$ в направлении возрастания x производная r меняет знак с «+» на «–».

2. Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшении температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателей. Степень реакции зависит от назначенного лекарства, его дозы. Предположим, что x обозначает дозу назначенного лекарства, а степень реакции y описывается функцией $y=f(x)=x^2(a-x)$, где a — некоторая положительная постоянная. При каком значении x реакция максимальна?

Решение. Очевидно, $0<x<a$. Имеем $f'(x)=2ax-3x^2$, $f''(x)=2a-6x$. Так как $x=\frac{2a}{3}$ — корень уравнения $f'(x)=0$ и $f''\left(\frac{2a}{3}\right)=-2a<0$, то $x=\frac{2a}{3}$ — тот уровень дозы, который дает максимальную реакцию.

3. Стоимость бриллианта пропорциональна квадрату его массы. При обработке бриллиант был расколот на две части. Каковы массы частей, если известно, что при этом произошла максимальная потеря стоимости?

Решение. Пусть m — масса бриллианта до его раскола на две части, а x — масса одной из оставшихся частей. Тогда

km^2 — стоимость бриллианта до раскола;

kx^2 — стоимость одной части бриллианта;

$k(m-x)^2$ — стоимость другой части бриллианта;

$f(x)=km^2-kx^2-k(m-x)^2$ — потеря стоимости бриллианта в результате его раскола на две части (k — коэффициент пропорциональности). Очевидно, $0<x<m$. Производная

$$f'(x)=-2kx+2k(m-x)=-4kx+2km$$

обращается в нуль в единственной точке $x=\frac{m}{2}$.

Это значение и доставляет $f(x)$ максимальное значение, так как

$$f'\left(\frac{m}{2}-h\right)=4kh>0,\quad f'\left(\frac{m}{2}+h\right)=-4kh<0.$$

Следовательно, массы частей: $\frac{m}{2}$ и $\frac{m}{2}$.

---

[1] Таким h остается и ниже.

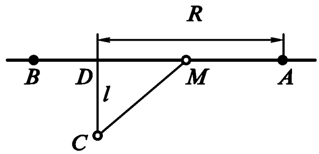


Рис. 3.7

4. По прямой BA проходит железная дорога (рис. 3.7) в стороне от которой находится пункт C. Требуется груз из пункта C перевезти в пункт M, лежащий на железной дороге, в направлении конечного пункта назначения A с наименьшими затратами. Из C в M перевозка осуществляется автомобильным транспортом, который в m раз дороже, чем железнодорожный.

Р е ш е н и е. Пусть x — расстояние DM, l — кратчайшее расстояние до железной дороги от пункта C, а R — расстояние от D до конечного пункта A на железной дороге. По теореме Пифагора

$$CM=\sqrt{l^2+x^2}.$$

Стоимость проезда y выражается в виде

$$y=y(x)=k(R-x)+mk\sqrt{l^2+x^2},$$

где k — стоимость перевозки на 1 км по железной дороге. Нужно найти наименьшую стоимость провоза груза из C в A указанным путем, т.е. наименьшее значение функции y на отрезке $[0;\ R]$. По условию задачи $x>0$. Поэтому производная

$$y'=-k+\frac{kmx}{\sqrt{l^2+x^2}}$$

для этих значений x обращается в нуль в единственной точке $x=x_0=$ $=\dfrac{l}{\sqrt{m^2-1}}$. Это значение x и доставляет y минимальное значение, так как

$$y'(x_0-h)=-k+\frac{km}{\sqrt{\dfrac{l^2}{(x_0-h)^2}+1}}<0,\quad y'(x_0+h)=-k+\frac{km}{\sqrt{\dfrac{l^2}{(x_0+h)^2}+1}}>0.$$

Итак, при $x=x_0$ получаем наименьшие затраты на перевозки груза.

П р и м е ч а н и е. В ответе не участвует число R. Это значит, что независимо от конечного пункта назначения груза его выгоднее всего возить к станции под углом α, таким, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{l}{x_0}=\sqrt{m^2-1}.$$

Определяется угол α только по величине m.

Например: если $m=2$, то $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$, т.е. $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

5. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. На рис. 3.8 построен график дифференцируемой функции $y=f(x)$. В точках A, B и C построим касательные к графику. Видно, что все точки графика, достаточно близкие к точке A и лежащие по обе стороны от нее, расположены ниже касательной. В этом случае график функции $f(x)$ называется ***выпуклым в точке*** A. Все точки графика, достаточно близкие к точке C и лежащие по обе стороны от нее, расположены выше касательной. В таком случае график функции $f(x)$ называется ***вогнутым в точке*** C.

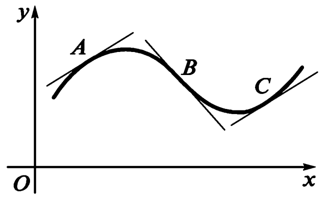


Рис. 3.8

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым*** (***вогнутым***) в интервале $(a;b)$, если он является выпуклым (вогнутым) в каждой своей точке с первой координатой из $(a;b)$. На рис. 3.8 график между точками A и B является выпуклым, а между точками B и C — вогнутым.

Касательная, проведенная через точку B (см. рис. 3.8), пересекает график. При этом во всех точках графика, близких к точке B и лежащих слева от нее, график является выпуклым, а во всех точках графика, лежащих справа от точки B и близких к ней, график является вогнутым. Точка графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, при переходе через которую график меняет выпуклость на вогнутость и наоборот, называется ***точкой перегиба***. В частности, на рис. 3.8 точка B — точка перегиба.

Сформулируем без доказательства теоремы, позволяющие находить интервалы выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба.

Теорема 3.8. ***Если вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) в интервале $(a;\ b)$, то график этой функции является вогнутым (выпуклым) в этом интервале.***

Теорема 3.9. ***Если вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ обращается в точке x_0 в нуль и при переходе через эту точку меняет знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ графика данной функции является точкой перегиба.***

Из этих теорем вытекает схема исследования на выпуклость и вогнутость дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$:

1) находится вторая производная $f''(x)$ и решается уравнение

$$f''(x) = 0; \tag{3.28}$$

2) корни этого уравнения делят область определения второй производной $f''(x)$ на интервалы, в каждом из которых $f''(x)$ сохраняет свой знак. В интервалах, где $f''(x) < 0$, график функции $y = f(x)$ является выпуклым; в интервалах, где $f''(x) > 0$, график этой функции является вогнутым. Корни уравнения (3.28), при переходе через которые $f''(x)$ меняет знак, являются точками перегиба графика.

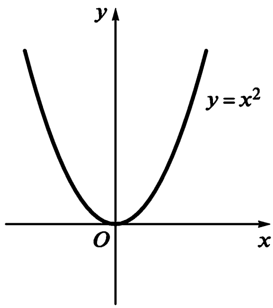


Рис. 3.9

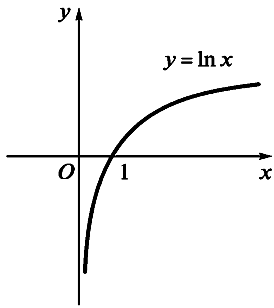


Рис. 3.10

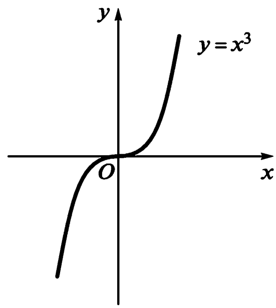


Рис. 3.11

Пример 3.40. Кривая $y = x^2$ (рис. 3.9) вогнута на всей числовой оси, так как $y'' = 2 > 0$.

Пример 3.41. Кривая $y = \ln x$ (рис. 3.10) выпукла в промежутке $(0; +\infty)$, так как в этом промежутке $y'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.

Пример 3.42. Кривая $y = x^3$ (рис. 3.11) выпукла в промежутке $(-\infty; 0)$, так как в этом промежутке $y'' = 6x < 0$, и вогнута в промежутке $(0; +\infty)$, так как в нем $y'' = 6x > 0$; при $x = 0$ $y'' = 0$, следовательно, точка $(0; 0)$ — точка перегиба.

6. Асимптоты. В подразд. 1.4 (см. п. 3) рассматривались асимптоты гиперболы. Многие другие линии также имеют асимптоты, т. е. прямые, к которым неограниченно приближается данная линия, когда ее точка неограниченно удаляется от начала координат.

Различают асимптоты вертикальные (т. е. параллельные оси ординат) и наклонные (т. е. не параллельные оси ординат).

Прямая $x = a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ является бесконечным, т. е. равно $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 3.43. Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{1}{x}$, так как

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Предположим, что функция $y = f(x)$ определена при сколь угодно больших (по модулю) значениях аргумента; для определенности будем рассматривать положительные значения аргумента. Прямая

$$y = kx + b \tag{3.29}$$

называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если эта функция представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{3.30}$$

где

$$\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0. \tag{3.31}$$

Теорема 3.10. *График функции $y = f(x)$ имеет при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту тогда и только тогда, когда существуют два предела*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \tag{3.32}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b. \tag{3.33}$$

Доказательство. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту (3.29). Тогда справедливы равенства (3.30) и (3.31). Следовательно,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k;$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to +\infty} [b + \alpha(x)] = b.$$

Обратно: пусть существуют предельные значения (3.32) и (3.33). Из (3.33) согласно установленной в подразд. 2.5, п. 1 теореме 2.1 имеем

$$f(x) - kx = b + \alpha(x), \text{ или } f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0.$

Следовательно, прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$.

Примечания. 1. Аналогично определяется наклонная асимптота и доказывается только что установленная теорема и для случая $x \to -\infty$.

2. Для $k = 0$ наклонная асимптота (3.29) при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) называется *горизонтальной асимптотой* при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Пример 3.44. График функции $y = \sqrt{x^2 + 1}$ имеет наклонную асимптоту $y = x$ при $x \to +\infty$. В самом деле,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$$

Пример 3.45. Прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

3.8. Построение графиков функций

Наиболее наглядное представление о ходе изменения функции дает ее график. Поэтому построение графика является заключительным этапом исследования функции, в котором используются все результаты ее исследования. Построение графика функции проводится по следующей схеме.

I. Находится область определения функции. Функция исследуется на четность, нечетность и периодичность. Напомним эти свойства.

Функция $f(x)$ называется четной, если выполнено условие $f(-x) = f(x)$; график четной функции симметричен относительно оси ординат. Например, $y = \cos x$ или $y = x\sin x$ — четные функции. Функция $f(x)$ называется нечетной, если выполнено условие $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Например, $y = x^3$ или $y = x \cos 2x$ — нечетные функции. Функция $f(x)$ называется периодической, если существует положительное число T (период функции) такое, что $f(x + T) = = f(x)$. Например, периодическими являются функции $\sin x$, $\cos x$ (период 2π), $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ (период π).

II. Находятся точки разрыва функции и в них вычисляются односторонние пределы.

III. Находятся точки пересечения графика функции с осями координат.

IV. Выясняется поведение функции в бесконечности.

V. Находятся промежутки возрастания и убывания функции.

VI. Функция исследуется на экстремум.

VII. Функция исследуется на выпуклость и вогнутость. Находятся точки перегиба.

VIII. Находятся уравнения асимптот, если они существуют.

IX. Строится график функции.

Заметим, что в некоторых случаях достаточно проводить частичные исследования, опуская некоторые пункты схемы.

Пример 3.46. Построим график функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Функция $f(x) = = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ определена и непрерывна для всех значений x, кроме $x = 1$, она не является ни четной, ни нечетной, ее график не имеет точек пересечения с осью Ox, так как $x^2 + 1 > 0$ для всех вещественных x. При $x = 0$ $y = -1$.

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1+0} f(x) = +\infty$$

т.е. прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой. При $x \to +\infty$ $y \to +\infty$, а при $x \to -\infty$ $y \to -\infty$. Производная данной функции $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$ обращается в нуль в точках $x_1 = 1 \quad \sqrt{2}$, $x_2 = 1 \quad \sqrt{2}$. Эти точки разбивают всю числовую ось на три промежутка $(-\infty; 1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2}; +\infty)$, внутри каждого из которых производная y' сохраняет постоянный знак. Очевидно, что в первом и третьем промежутках $y' > 0$, и, следовательно, здесь функция y возрастает, во втором промежутке $y' < 0$, и, следовательно, в этом промежутке данная функция убывает. Ее вторая производная $y'' = \frac{4}{(x-1)^3}$ всюду отлична от нуля (значит, точек перегиба график рассматриваемой функции не имеет), в промежутке $(-\infty;\ 1)$ $y'' < 0$, и, следовательно, здесь график данной функции является выпуклым и в точке x_1 эта функция имеет максимум, причем $f(x_1) = 2\ \ 2\sqrt{2}$; в промежутке $(1;\ +\infty)$ $y'' > 0$, и, следовательно, в последнем промежутке этот график является вогнутым и в точке x_2 данная функция имеет минимум, причем $f(x_2) = 2\ \ 2\sqrt{2}$. Наконец, поскольку

$$\frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}$$

и

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x-1} = 0,$$

график данной функции имеет наклонную асимптоту $y = x\ \ 1+$ и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$. График функции $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ изображен на рис. 3.12.

Пример 3.47. Построим график функции $y = e^{-x^2}$.

Эта функция определена, непрерывна, положительна на всей числовой оси и является четной. Поэтому достаточно построить ее график в первом квадранте. При $x = 0$ $y = 1$, при $x \to +\infty$ $y \to 0$. Поэтому прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика данной функции при $x \to +\infty$. Производная $y' = -2xe^{-x^2}$ обращается в нуль только в точке $x_0 = 0$; при $x > 0$ $y' < 0$, т.е.

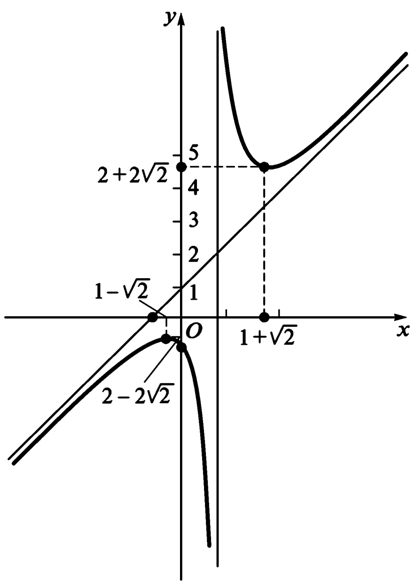


Рис. 3.12

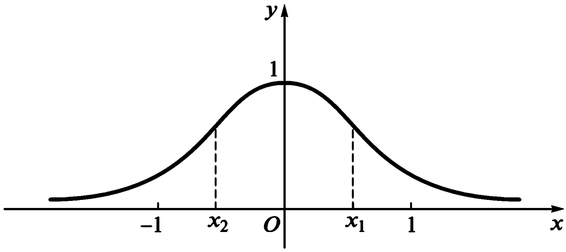


Рис. 3.13

при $x > 0$ данная функция убывает. Ее вторая производная $y'' = 2(2x^2 \quad 1)e^{-x^2}$ – в точке $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ обращается в нуль, в промежутке $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right) y'' > 0$, и, следовательно, здесь график данной функции является вогнутым, а в промежутке $[x_0; x_1)\, y'' < 0$, и, следовательно, в нем этот же график является выпуклым и x_1 — абсцисса его точки перегиба (значит, ордината этой точки $e^{-\frac{1}{2}}$), и, наконец, в точке x_0 данная функция имеет максимум. График данной функции изображен на рис. 3.13. Это, так называемая, кривая Гаусса.

Выполните задания

Найдите производные функций, пользуясь непосредственно определением производной:

1. $y = 3x$. **2.** $y = 8 \quad x^2$. **3.** $y = (4x \quad 1)^2 +$ **4.** $y = \frac{x^3}{3}$. **5.** $y = \frac{1}{x-3}$.

6. $y = \sqrt{1 \quad x^2}$.

Найдите производные следующих функций:

7. $y = 1 \quad 2x^3$. **8.** $y = \frac{x+2}{x}$. **9.** $y = \frac{3}{x^2-1}$. **10.** $y = \frac{1}{x^2}$. **11.** $y = 2\sqrt{x} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad 5$.

12. $y = \frac{x^3}{3} \quad \frac{3}{x^3}$. **13.** $y = \frac{2x+1}{5}$. **14.** $y = x^2(2x \quad 1)$. **15.** $y = (x^3 \quad 3)(4x^2 \quad 5)$.

16. $y = (x \quad 5)^4 (x \quad 3)^5$. **17.** $y = (x \quad 1)\sqrt{x}$. **18.** $y = \frac{x^3-3}{5-x^2}$. **19.** $y = \frac{5x}{(5-2x)^3}$.

20. $y = \frac{(3x^2+5)^3}{2x-3}$. **21.** $y = \frac{2}{(x^3+5)^5}$. **22.** $y = \sqrt[3]{6x^2 \quad 5}$. **23.** $y = \sqrt[3]{(4 \quad 3x)^2}$.

24. $y = \frac{5}{\sqrt{x^2+4}}$. **25.** $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$. **26.** $y = \sin^3 x$. **27.** $y = \sin x^2$.

28. $y = \cos^2 \frac{x}{2}$. **29.** $y = \cos\frac{x^3}{2}$. **30.** $y = x^2 \cos x$. **31.** $y = \frac{\sin 2x}{\cos 3x}$.

32. $y = (x^2 \quad 2)\sin x \quad 2x\cos x$. **33.** $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$. **34.** $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

35. $y = \mathrm{tg}^4(x^2 \quad 1)$. **36.** $y = (\mathrm{tg}\, x \quad \mathrm{ctg}\, x)^2$. **37.** $y = x \quad \mathrm{tg}\, x$. **38.** $y = \frac{\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{x}}$.

39. $y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x}$. **40.** $y=\ln^2 x$. **41.** $y=\frac{1}{x}+2\ln x+\frac{\ln x}{x}$. **42.** $y=\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

43. $y=\ln x^2$. **44.** $y=(x+1)e^x$. **45.** $y=(x^2-4x+8)e^{\frac{x}{2}}$. **46.** $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

47. $y=e^{x\ln x}$. **48.** $y=x^2 2^x$. **49.** $y=e^{\sqrt{x}}$. **50.** $y=\operatorname{tg}^3 2x\cos^2 2x$.

51. $y=\ln(e^{-x}+xe^{-x})$. **52.** $y=\ln\frac{x^3-9}{x^3-1}$. **53.** $y=x+\operatorname{arctg}x$.

54. $y=\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$. **55.** $y=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

56. $y=\ln\,\sin\frac{2x+4}{x+1}$. **57.** $y=\arcsin(e^{x^2})$. **58.** $y=\ln\frac{e^x}{1+e^x}$.

59. $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. **60.** $y=\operatorname{arctg}\frac{a}{x}+\ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$.

61. $y=\arcsin\frac{x-2}{3}$. **62.** $y=\frac{(1+x^2)\operatorname{arctg}x-x}{2}$. **63.** $y=4^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}}$.

64. $y=\ln\,\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$.

65. Напишите уравнение касательной к кривой $y = x^2$ в точке $A(2; 4)$.

66. Напишите уравнение касательной к синусоиде $y=\sin x$ в точке $(\pi; 0)$.

67. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой $y=5+3x^2$ в точке с абсциссой $x = -2$.

68. Напишите уравнение нормали к параболе $y^2=2x$ в точке A (8; 4).

69. Напишите уравнение нормали к окружности $x^2+y^2=25$ в точке $A(3; -4)$.

70. Лифт после включения движется по закону $s=1{,}5t^2+2t+12$, где s — путь (в метрах), t — время (в секундах). Найдите скорость лифта в момент времени $t = 2$.

71. Закон движения точки по прямой описывается уравнением $s=t^3-3t^2+3t+5$, где s — путь (в метрах), t — время (в секундах). В какие моменты времени t скорость v точки равна нулю?

72. Атмосферное давление воздуха p на высоте h над уровнем моря можно вычислить по формуле $p=p_0e^{-h/a}$, где p_0 — давление на уровне моря и a — постоянная. Найдите скорость v изменения давления с высотой и выразите ее как функцию p.

Найдите дифференциалы следующих функций:

73. $y=(a^2+x^2)^2$. **74.** $y=\sqrt{4+x^2}$. **75.** $y=\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. **76.** $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}x$.

77. $y=\operatorname{arctg}(x^2)$. **78.** $y=x(2x-3)(4x+5)$. **79.** $y=\frac{3x-4}{2x+3}$.

80. $y=e^{x^2}+x+1$. **81.** $y=8^x$. **82.** $y=\cos^2\frac{x}{2}$. **83.** $y=\sin(2x+3)$.

Найдите с помощью дифференциала приближенные значения для следующих выражений:

84. $\sqrt[3]{1{,}1}$. **85.** $\sqrt[5]{1{,}02}$ **86.** $\sqrt[3]{26{,}19}$. **87.** $\sin 31^\circ$. **88.** $\ln 1{,}007$. **89.** $\cos 61^\circ$.

Найдите производные высших порядков следующих функций:

90. $y=x^5-3x^4+x^3-5x^2+x-1$; $y''=?$ **91.** $y=2x^3-3x^2+1$; $y'''=?$

92. $y=x^3+3x^2+4$; $y^{\mathrm{V}}=?$ **93.** $y=x\ln x$; $y''=?$ **94.** $y=\mathrm{e}^{2x}$; $y'''=?$

95. $y=\mathrm{e}^x+x^2$; $y^{\mathrm{IV}}=?$ **96.** $y=\mathrm{e}^{\cos x}$; $y''=?$ **97.** $y=\sin 2x$; $y''=?$

98. $y=\operatorname{arctg} x$; $y''=?$

Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:

99. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 10x}$. **100.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$. **101.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

102. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$. **103.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$. **104.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$. **105.** $\lim\limits_{x\to 0+0}x^n\ln x\,(n>0)$.

106. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$. **107.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$. **108.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$.

109. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg}5x}$. **110.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n-1}$. **111.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$. **112.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{\sin 4x}$.

Найдите интервалы возрастания и убывания следующих функций:

113. $y=3x-x^3$. **114.** $y=x^2-4x$. **115.** $y=\dfrac{2}{3}x^3-2x-1$. **116.** $y=3x+\dfrac{3}{x}+5$.
117. $y=4x-3$.

Исследуйте на экстремум следующие функции:

118. $y=2x^2-8$. **119.** $y=2x-x^2$. **120.** $y=x^3-9x^2+15x-3$. **121.** $y=x\ln x$.

122. $y=\dfrac{x}{x^2+4}$. **123.** $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения следующих функций:

124. $y=x^4-8x^2+3$ на отрезке $[-2;\,2]$. **125.** $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3$ на отрезке $[-1;\,2]$. **126.** $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ на отрезке $\left[-\dfrac{1}{2};\,\dfrac{1}{2}\right]$. **127.** $y=\operatorname{tg}x-x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4};\,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

128. Найдите положительное число x, чтобы разность $x-x^2$ была наибольшей.

129. Найдите число, которое в сумме со своим квадратом дает наименьшее значение.

130. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Каковы должны быть размеры этого окна, чтобы при данном его периметре $2p$ оно пропускало наибольшее количество света?

131. Нужно изготовить коническую воронку с образующей l. Какова должна быть высота H воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

132. Материальная точка совершает прямолинейное движение по закону $s(t)=18t+9t^2-t^3$, где s — путь, м; t — время, с. В какой момент времени t скорость v движения точки будет наибольшей и каково значение этой наибольшей скорости?

Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости следующих кривых:

133. $y = x^5$. **134.** $y = \sqrt[3]{x\ \ 1}$. **135.** $y = x^3 + 15x^2 - x\ \ 250$.

Найдите асимптоты следующих кривых:

136. $y = 1\ \ \frac{4}{x^2}$. **137.** $y = \frac{x^2+1}{x}$. **138.** $y = \frac{x^2}{x+1}$.

Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

139. $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x$. **140.** $y = \frac{x}{x^2+16}$. **141.** $y = e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Глава 4

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла. В гл. 3 было введено новое действие — дифференцирование: нахождение по заданной функции ее производной. Оказывается, что для дифференцирования существует обратное действие — интегрирование: отыскание функции по заданной ее производной. К этому приводят многочисленные задачи физики, химии и других областей науки и техники.

Ранее (см. подразд. 3.1, п. 1) было установлено, что если известен закон $s = s(t)$ прямолинейного движения материальной точки, выражающий зависимость пути s от времени движения t, то скорость точки выражается производной пути по времени: $v = s'(t)$. Обратная задача: известна скорость прямолинейного движения точки $v = v(t)$ как функция времени. Надо найти закон движения. Ясно, что искомой функцией $s = s(t)$ будет такая, для которой $s'(t) = v(t)$. Аналогично, если известна скорость $v = v(t)$ протекания химической реакции, показывающая количество вещества, реагирующего в единицу времени, то законом реакции будет функция $m = m(t)$, такая, что $m'(t) = v(t)$.

Определение 4.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функцией для данной функции $f(x)$ (или, короче, первообразной данной функции) на данном промежутке, если на этом промежутке $F'(x) = f(x)$.

Пример 4.1. Функция $F(x) = x^3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ на всей числовой оси, так как при любом x $(x^3)' = 3x^2$. Отметим при этом, что вместе с функцией $F(x) = x^3$ первообразной для $f(x) = 3x^2$ является любая функция $\Phi(x) = x^3 + C$, где C — произвольное постоянное число (это следует из того, что производная постоянной равна нулю). Это свойство имеет место и в общем случае.

Теорема 4.1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке, то разность между ними в этом промежутке равна постоянному числу.*

Доказательство. Пусть, например, указанный промежуток — интервал $(a;\ b)$. Из определения первообразной имеем $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$ для любого x из $(a;\ b)$. Пусть $\alpha(x) = F_2(x) \quad F_1(x)$. Тогда для любого x из $(a;\ b)$

$$\alpha'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

следовательно (см. следствие из подразд. 3.6, п. 3), $\alpha(x) \equiv C$.

Из теоремы 4.1 следует, что если известна какая-нибудь первообразная $F(x)$ данной функции $f(x)$, то все множество первообразных для $f(x)$ исчерпывается функциями $F(x)+C$.

Подчеркнем важный факт: если производная для функции одна, т.е. операция дифференцирования однозначна, то нахождение первообразной для функции возможно лишь с точностью до некоторого постоянного слагаемого.

Определение 4.2. Выражение $F(x) + C$, где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ и C — произвольная постоянная, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$, причем $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\ dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*, *знак* $\int$ — *знаком интеграла*. Таким образом, по определению, $\int f(x)dx = F(x) \quad C$, если $F'(x) = f(x)$.

Возникает вопрос: для всякой ли функции $f(x)$ существует первообразная, а значит, и неопределенный интеграл. В связи с этим вопросом приведем без доказательства следующую теорему (см. [10]).

Теорема 4.2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то на этом сегменте у функции $f(x)$ существует первообразная.*

Ниже мы будем говорить о первообразных лишь для непрерывных функций. Поэтому рассматриваемые нами далее в этом параграфе все интегралы существуют.

2. Свойства неопределенного интеграла. Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие свойства.

1. $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ и, значит, $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2. $\int F'(x)dx = F(x) \quad C$, что может быть переписано так:

$$\int dF(x) = F(x) \quad C. \quad +$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx. \tag{4.1}$$

Действительно, имеем

$$(c\int f(x)dx)' = c(\int f(x)dx)' = cf(x).$$

Совершенно так же доказывается свойство 4.

4. Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \tag{4.2}$$

Примечание 1. Равенства (4.1) и (4.2) следует понимать с точностью до постоянного слагаемого.

Примечание 2. Свойство 4 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа функций.

3. Таблица основных интегралов. Таблица содержит формулы, легко проверяемые непосредственным дифференцированием.

1. $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \; (\mu \neq -1).$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
4. $\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C.$
5. $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$
6. $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax + C.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax + C.$
9. $\int \frac{x\,dx}{x^2 + a} = \frac{1}{2}\ln|x^2 + a| + C.$
10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$
13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C.$

Проверим, например, формулу 2. Если $x > 0$, то $|x| = x$ и $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $(\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$. Значит, формула 2 справедлива как при $x > 0$, так и при $x < 0$.

4. Примеры непосредственного интегрирования. Метод непосредственного интегрирования связан с приведением подынтегрального выражения к табличной форме путем преобразований и применения свойств неопределенного интеграла.

Пример 4.2. $\int (5x^4 - 3x^2 + 1)dx = 5\int x^4 dx - 3\int x^2 dx + \int dx = x^5 - x^3 + x + C.$

Пример 4.3. $\int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2}dx = \int (x^4 - x^3 + x^{-2})dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C.$

Пример 4.4. $\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^2 dx = \int (x - 2x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{2}{3}})dx = \frac{x^2}{2} - \frac{12}{11}x^{\frac{11}{6}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C =$

$= \frac{x^2}{2} - \frac{12}{11}x\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C.$

4.2. Основные методы интегрирования

1. Замена переменной интегрирования. Этот способ часто бывает полезным в тех случаях, когда интеграл $\int f(x)dx$ ($f(x)$ — непрерывна) не может быть непосредственно преобразован к виду табличного. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $f(x) = f[\varphi(t)]$, $dx = \varphi'(t)dt$ и

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt. \tag{4.3}$$

Формула (4.3) называется *формулой замены переменной в неопределенном интеграле.*

Пример 4.5. Интеграл $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ найдем подстановкой $x = t^2$. Тогда $dx = 2tdt$ и $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$

Иногда вместо подстановки $x = \varphi(t)$ лучше выполнить замену переменной вида $t = \psi(x)$.

Пример 4.6. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$. Полагая $t = e^x$, получаем $dt = e^x dx = tdx$, $dx = \frac{dt}{t}$ и $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dt}{t(t + t^{-1})} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C.$

Во многих случаях нет необходимости записывать, какое выражение мы принимаем за новую переменную. Вычисления удобно располагать так, как указано в следующих примерах.

Пример 4.7. $\int \sqrt{x+3}\,dx = \int (x+3)^{\frac{1}{2}} d(x+3) = \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} + C.$

Пример 4.8. $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

Пример 4.9. $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx = \int \ln^3 x\, d\ln x = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$

2. Интегрирование по частям. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Как известно (см. подразд. 3.2, п. 1), $d(uv) = vdu + udv$, откуда $udv = d(uv) - vdu$. Интегрируя последнее соотношение, получим:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{4.4}$$

(произвольная постоянная интегрирования C здесь включена в слагаемое $\int vdu$). Это и есть *формула интегрирования по частям.* Применение способа интегрирования по частям целесообразно в том случае, когда интеграл в правой части (4.4) окажется более простым для вычисления, чем исходный интеграл.

Пример 4.10. $\int \underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$

К числу интегралов, вычисляемых с помощью формулы (4.4), относятся, например, интегралы вида: $\int P(x) f(x)\,dx$, где $P(x)$ — многочлен (в частности, степенная функция x^n), $f(x)$ — одна из следующих функций: e^{ax}, $\sin ax$, $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$. При этом для интегралов вида $\int P(x)e^{ax}\,dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$, за u принимается многочлен $P(x)$, а для интегралов вида $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, за u принимается $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$.

Пример 4.11. $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

Пример 4.12. $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos x dx}_{dv} = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$

Пример 4.13. $\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

Иногда полезно повторное интегрирование по частям.

Пример 4.14. $\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\cos x dx}_{dv} = x^2\sin x - 2\int \underbrace{x}_{u_1}\underbrace{\sin x dx}_{dv_1} = x^2\sin x + 2x\cos x -$

$-2\int \cos x dx = x^2\sin x + 2x\cos x + C.$

Примечание. Заканчивая методы интегрирования, заметим, что хотя для всякой непрерывной функции существует первообразная (см. подразд. 4.1, п. 1, теорема 4.2), но эта первообразная не для всякой непрерывной функции является элементарной функцией. Например, для функции e^{-x^2} первообразная не выражается в элементарных функциях. В этом случае говорят, что интеграл $\int e^{-x^2} dx$ *не берется в элементарных функциях.*

4.3. Понятие определенного интеграла

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

Задача о пройденном пути. Требуется найти путь, пройденный движущейся по прямой точкой за отрезок времени $[t_0, T]$, если известен закон изменения мгновенной скорости $v = v(t)$. Разобьем отрезок времени $[t_0, T]$ моментами времени (точками) $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$ на n частичных отрезков времени и положим $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через $\lambda = \max \Delta t_k$. Если эти отрезки достаточно малы, то без большой ошибки на каждом из них движение можно считать равномерным, что дает приближенное выражение для пути

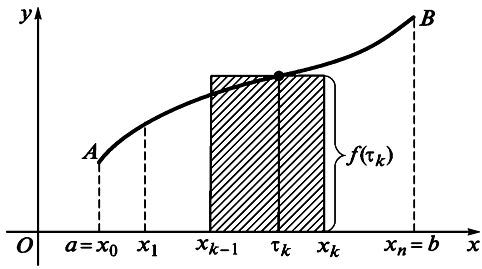


Рис. 4.1

$$s \approx v(\tau_1)\Delta t_1 + v(\tau_2)\Delta t_2 + \ldots + v(\tau_n)\Delta t_n,$$

где τ_k — одна из точек сегмента $[t_{k-1}, t_k]$. Эта сумма (ее кратко будем обозначать через $\sum\limits_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k$) будет тем точнее выражать искомый путь s, чем меньше будет каждый из временных отрезков $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому за путь s, пройденный точкой за время $T - t_0$ со скоростью $v = v(t)$, естественно принять

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k. \tag{4.5}$$

Задачи о площади криволинейной трапеции. Пусть требуется найти площадь плоской фигуры $aABb$ (рис. 4.1), ограниченной графиком функции $y = f(x)$, непрерывной и неотрицательной на сегменте $[a; b]$, и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Эта фигура называется криволинейной трапецией. Разобьем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков и положим $\Delta x_k = x_k \quad x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через $\lambda = \max \Delta x_k$. На каждом частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, выберем произвольную точку τ_k, $x_{k-1} \le \tau_k \le x_k$. Произведение $f(\tau_k)\Delta x_k$ даст площадь прямоугольника, имеющего основание Δx_k и высоту $f(\tau_k)$, а сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k$ — приближенно площадь S криволинейной трапеции $aABb$. Отсюда, как и в предыдущих задачах,

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k. \tag{4.6}$$

2. Определение определенного интеграла. Из решения приведенных двух задач видно, что, хотя они имеют различный смысл, математический аппарат для их решения один и тот же. Во всех этих задачах получаем выражение одного и того же вида:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k. \tag{4.7}$$

Если существует предел (4.7), не зависящий от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и выбора точек τ_k, то этот предел будем называть *определенным* интегралом функции $f(x)$ на сегменте $[a; b]$ и обозначать символом

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k.$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$. При этом $f(x)$ называется *подынтегральной* функцией, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, числа a и b — *пределами интегрирования* (a — *нижний предел*, b — *верхний предел*), сумма $\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k$ — *интегральной суммой.*

Справедлива следующая теорема (она доказывается в подробных курсах математического анализа — см., например, [10]).

> ***Теорема 4.3.*** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем.*

В условиях рассмотренных выше задач, приведших к понятию определенного интеграла, выражения вида (4.5), (4.6) (пределы сумм) являются определенными интегралами. Рассмотрим это подробнее.

1. Путь s, пройденный точкой за время $T - t_0$ со скоростью $v = v(t)$ ($v(t)$ непрерывна на $[t_0, T]$), есть $\int_{t_0}^{T} v(t)dt$.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на сегменте $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу — осью Ox, с боков — прямыми $x = a$ и $x = b$.

4.4. Основные свойства определенного интеграла

1. Свойства определенного интеграла. Ниже рассматриваем функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[a; b]$. По определению полагают, что определенный интеграл от функции с равными верхним и нижним пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Действительно, по определению определенного интеграла как предела интегральной суммы имеем

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} cf(\tau_k)\Delta x_k =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} c\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k =$$

$$= c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k = c\int_a^b f(x)dx.$$

Аналогично устанавливается свойство 2.

2. *Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от этих функций:*

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

П р и м е ч а н и е. Свойство 2 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа функций.

3. *При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Действительно, здесь соответствующие интегральные суммы различаются по знаку, ибо в одной из них все $\Delta x_k = x_k \quad x_{k-1}$ положительны, в другой — аналогичные разности все отрицательны.

4. *Интеграл по сегменту равен сумме интегралов по его частям:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad \int_c^b f(x)dx;$$

где $a < c < b$.

Это свойство вытекает из определения определенного интеграла.

2. Формула Ньютона — Лейбница[1].

Теорема 4.4. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$ и $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на этом отрезке, то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) \quad F(a)-. \tag{4.8}$$

Формула (4.8) называется *формулой Ньютона — Лейбница*. Эта формула дает удобное правило вычисления определенного интеграла. Кроме того, она устанавливает связь между определенным интегралом и неопределенным интегралом.

Доказательство. Разобьем сегмент $[a; b]$ на n частичных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Согласно формуле Лагранжа и формуле $F'(x) = f(x)$ имеем

$$F(x_1) - F(a) = F'(c_1)(x_1 - a) = f(c_1)\Delta x_1, a \quad c_1 \quad x_1, < \quad <$$

$$F(x_2) - F(x_1) = F'(c_2)(x_2 - x_1) = f(c_2)\Delta x_2, x_1 \quad c_2 \quad x_2, < \quad <$$

....

$$F(b) - F(x_{n-1}) = F'(c_n)(b - x_{n-1}) = f(c_n)\Delta x_n, x_{n-1} < c_n < b.$$

Суммируя эти равенства, получаем

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k. \tag{4.9}$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Поэтому, переходя в (4.9) к пределу при $\lambda \to 0$, получаем искомую формулу (4.8).

Примечание. Для краткости записи употребляются обозначения $F(x)\big|_a^b = F(b) \quad F(a)-$ или $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) \quad F(a)-$. Поэтому формула Ньютона — Лейбница принимает вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b \text{ (или } \big[F(x)\big]_a^b\text{)}.$$

Заметим, что в формуле (4.9) можно взять любую из первообразных для $f(x)$, так как $\big[F(x)+C\big]_a^b = F(b) \quad C+ \quad F(a) \quad C- \quad F(b) \quad F(a)-$

Пример 4.15. $\int_0^1 2xdx = x^2\big|_0^1 \quad 1. \quad =$

---

[1] Исаак Ньютон (1643 — 1727) — английский математик и физик. Ньютон и Лейбниц — создатели дифференциального и интегрального исчислений.

Пример 4.16. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

Пример 4.17. Скорость движения тела задана уравнением $v = 12t - 3t^2$ (м/с). Найдем путь, пройденный телом от начала его движения до остановки.

Р е ш е н и е. Скорость тела равна нулю в момент начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для этого приравняем скорость к нулю и решим уравнение относительно t:

$$12t - 3t^2 = 0,\ t(4 - t) = 0,\ t_1 = 0,\ t_2 = 4.$$

Теперь искомый путь будет

$$S = \int\limits_0^4 (12t - 3t^2)dt = (6t^2 - t^3)\Big|_0^4 = 32 \text{ (м)}.$$

3. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_a^x f(t)dt,$$

где x — любая точка из $[a; b]$.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, то согласно формуле Ньютона—Лейбница имеем

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = f(x).$$

Таким образом, *производная определенного интеграла с переменным верхним пределом по этому пределу равна значению подынтегральной функции для этого предела.*

4. Теорема о среднем.

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то в интервале $(a; b)$ найдется такая точка c, что*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b - a)\cdot f(c). \qquad (4.10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Ньютона—Лейбница имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$.

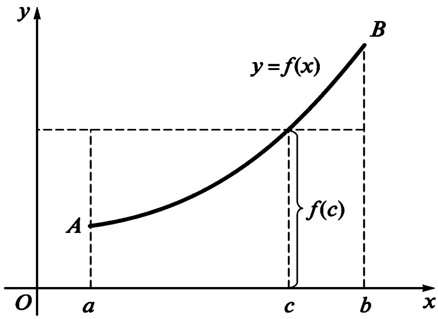


Рис. 4.2

Применяя к разности $F(b) - F(a)$ теорему Лагранжа (см. подразд. 3.6), получаем

$$F(b) - F(a) = (b-a)\cdot F'(c) = (b-a)\cdot f(c), \text{ где } a < c < b,$$

что и приводит к искомой формуле (4.10).

Формула (4.10) при $f(x) \geq 0$ имеет простое геометрическое толкование. Площадь криволинейной трапеции $ABba$ равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной $f(c)$ (рис. 4.2).

5. Замена переменной в определенном интеграле. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, функция $x = \varphi(t)$ имеет на сегменте $[\alpha; \beta]$ непрерывную производную, при этом $a \leq \varphi(t) \leq b$ и $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. Пусть $F(x)$ — одна из первообразных функций $f(x)$. Тогда $F'(x) = f(x)$ и в силу формулы производной сложной функции (см. подразд. 3.2, п. 1)

$$[F(\varphi(t))]' = F'_x(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Теперь воспользуемся дважды формулой Ньютона—Лейбница:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Тем самым доказана формула замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 4.18. Подстановка $x = e^t$ дает

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{arctg} t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

6. Интегрирование по частям. Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые на сегменте $[a;\ b]$ функции. Пользуясь формулой Ньютона—Лейбница, имеем

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b (uv)'dx = \int_a^b d(uv) = \int_a^b [vdu + udv] = \int_a^b vdu + \int_a^b udv,$$

откуда

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b \quad \int_a^b vdu.$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Пример 4.19. $\int_0^\pi \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x dx}_{dv} = (x\sin x)\Big|_0^\pi \quad \int_0^\pi \sin x dx \quad \cos x\Big|_0^\pi \quad 2.$

4.5. Приближенное вычисление определенного интеграла

Пусть речь идет о вычислении интеграла

$$\int_a^b f(x)dx, \tag{4.11}$$

где $f(x)$ — функция, непрерывная на сегменте $[a;\ b]$.

Формула Ньютона—Лейбница не всегда позволяет вычислить интеграл (4.9), так как далеко не всегда мы знаем первообразную для подынтегральной функции. Здесь на помощь приходит приближенное вычисление определенных интегралов. Кстати, на практике часто и не требуется знать точное значение данного интеграла. Рассмотрим два способа приближенного вычисления определенных интегралов: метод прямоугольников и метод трапеции.

Если $f(x) \geq 0$ на сегменте $[a;\ b]$, то, как известно (см. подразд. 4.3), интеграл (4.11) представляет собой площадь криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу отрезком $[a;\ b]$ оси Ox, с боков отрезками прямых $x = a, x \quad b$. Составим интегральную сумму, соответствующую делению сегмента $[a;\ b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < < x_k < \ldots < x_n = b$ и выбору точек $\tau_k = x_{k-1} (k \quad 1, 2, \ldots, n)$: $\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k$. Но $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$.

Значит,

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}).$$

Сумма $\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k$ есть площадь ступенчатой фигуры, изображенной на рис. 4.3. Поэтому площадь указанной криволинейной трапеции приближенно равна площади этой ступенчатой фигуры, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}). \qquad (4.12)$$

Если $\tau_k = x_k (k \;\; 1, 2, \ldots, n)$, то аналогично получим приближенную формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k). \qquad (4.13)$$

Формулы (4.12) и (4.13) называют *формулами прямоугольников*.

Если функция $f(x)$ возрастает на $[a; b]$, то формула (4.12) дает значение интеграла (4.11) по недостатку, а формула (4.13) — по избытку. Поэтому для повышения точности естественно взять среднее арифметическое этих формул:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right). \qquad (4.14)$$

Эту формулу называют *формулой трапеций*, так как ее геометрический смысл связан с заменой площади каждой прямоугольной полоски, на которые разбивается криволинейная трапеция, на площадь прямолинейной трапеции.

Пример 4.20. Вычислим значение интеграла

$$\int_0^2 e^{-x^2}dx: \qquad (4.15)$$

а) по формулам прямоугольников (4.12) и (4.13) при $n = 10$ и $n = 20$;

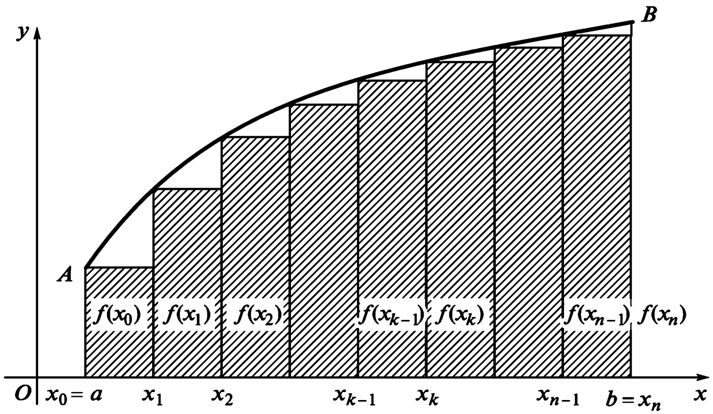


Рис. 4.3

б) по формуле трапеций при $n = 10$ и $n = 20$.

При рассмотрении этого примера будем использовать, например, язык программирования FORTRAN.

Вычислим сначала приближенное значение интеграла (4.15) по формуле прямоугольников (4.12) при $n = 10$. В этом случае $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}4$, $x_3 = 0{,}6$, $x_4 = 0{,}8$, $x_5 = 1{,}0$, $x_6 = 1{,}2$, $x_7 = 1{,}4$, $x_8 = 1{,}6$, $x_9 = 1{,}8$, и потому

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{2-0}{10}(e^{-0^2} + e^{-0{,}2^2} + \ldots + e^{-1{,}8^2}).$$

Программа вычисления интеграла имеет вид

```
SUM = 0
DO I = 0,9
   X = I * 0.2
   Fi  = EXP(-X**2)
   SUM = SUM + Fi
END DO
EINT = SUM * (2 - 0)/10
WRITE(*,*) 'Ответ: ', EINT
STOP
END
```

Ответ по формулам прямоугольников: 0,98.

Вычисление по формуле (4.13) при $n = 10$ производится по аналогичной программе с той лишь разницей, что начальным значением аргумента является 0,2, а конечным значением — число 2. Получаем ответ: 0,78. Среднее арифметическое этих ответов 0,88 дает приближенное значение интеграла по формуле трапеций.

Аналогично производятся подсчеты при $n = 20$.

Ответ по формуле трапеций: 0,882.

Заметим, что все три формулы (4.12), (4.13) и (4.14) приближают интеграл (4.11) тем лучше, чем больше n.

Наконец, отметим, что каждый из изложенных методов содержит четкий алгоритм их нахождения. Это позволяет широко применять эти методы для вычислений на ЭВМ.

4.6. Виды несобственных интегралов, их сходимость

При введении понятия определенного интеграла мы исходили из условий ограниченности подынтегральной функции и конечности пределов интегрирования. Такой интеграл называется *собственным* (слово «собственный» обычно опускается). Если хотя бы одно из этих двух условий не выполнено, то интеграл называется *несобственным*.

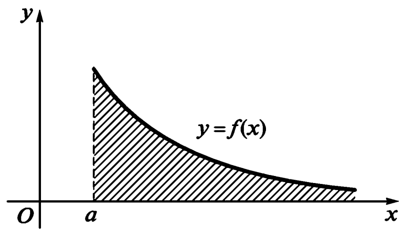


Рис. 4.4

1. Интегралы с бесконечными пределами. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a \le x < +\infty$, т. е. для $x \ge a$. Тогда по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{4.16}$$

Если последний предел существует, то говорят, что интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{4.17}$$

сходится, а если этот предел не существует, то интеграл (4.17) называют *расходящимся*. Такому интегралу не приписывают никакого значения.

Геометрически для неотрицательной при $x \ge a$ функции $f(x)$ несобственный интеграл (4.17) по аналогии с собственным интегралом (см. подразд. 4.3, п. 2) представляет собой площадь фигуры, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева отрезком прямой $x = a$, снизу осью Ox (рис. 4.4).

Пример 4.21. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx \quad \lim_{b\to+\infty}(1 \quad e^{-b}) \quad 1. =$

Заданный несобственный интеграл сходится.

Пример 4.22. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln b \ = +\infty$

Следовательно, данный интеграл расходится.

Пример 4.23. $\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \sin b.$

Последний предел не существует, т. е. несобственный интеграл расходится.

Пример 4.24. Установить, при каких значениях α сходится интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Случай $\alpha = 1$ рассмотрен в примере 4.22. При $\alpha \ne 1$ имеем

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}=\begin{cases}+\infty & \text{при } \alpha<1,\\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha>1.\end{cases}$$

Значит, данный интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

На несобственные интегралы вида (4.17) непосредственно распространяются многие свойства собственных интегралов.

Пусть $F(x)$ — первообразная функция для подынтегральной функции $f(x)$ сходящегося интеграла (4.17). На основании формулы (4.16) и формулы Ньютона — Лейбница имеем

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b) \quad F(a)). \qquad -$$

Если ввести условное обозначение

$$F(+\infty)=\lim_{b\to+\infty}F(b),$$

то получим для сходящегося несобственного интеграла (4.17) обобщенную формулу Ньютона — Лейбница

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(\quad)+\infty F(a),$$

которую записывают также в виде

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} \quad \text{или} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = [F(x)]_a^{+\infty}.$$

Заметим еще, что для вычисления сходящихся интегралов вида (4.17) сохраняются методы подстановки и интегрирования по частям.

Самым простым признаком сходимости несобственных интегралов вида (4.17) является признак сравнения.

Рассмотрим его для случая неотрицательной подынтегральной функции.

Теорема сравнения. *Если в промежутке* $[a, +\infty)$ *функции* $f(x)$, $g(x)$ *непрерывны и удовлетворяют неравенствам* $0 \le g(x) \le f(x)$, *то из сходимости интеграла*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{4.18}$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx. \tag{4.19}$$

Этот признак вытекает из геометрического смысла интеграла (4.17).

Из этого признака следует, что при том же условии из расходимости интеграла (4.19) следует расходимость интеграла (4.18).

Пример 4.25. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$ сходится, так как при $x \geq 1$ $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}} < \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$ сходится (см. пример 4.24).

Пример 4.26. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+2}{x\sqrt{x}} dx$ расходится, так как при $x \geq 1$ $\frac{x+2}{x\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится (см. пример 4.24).

Пусть теперь в интеграле (4.17) функция $f(x)$ может принимать значения разных знаков.

Теорема 4.5. *Из сходимости интеграла*

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)| dx \tag{4.20}$$

следует сходимость интеграла (4.17).

Интеграл (4.17) называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл (4.20).

Пример 4.27. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ сходится абсолютно, потому что сходится по теореме сравнения $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx$ (при $x \geq 1$ $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ сходится; см. пример 4.24).

Все изложенное непосредственно переносится на интегралы вида

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x) dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x) dx \tag{4.21}$$

(кстати заметим, что от интеграла (4.21) легко перейти к интегралу вида (4.17) с помощью подстановки $x = -y$).

Наконец, по определению

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x) dx \quad \int\limits_c^{+\infty} f(x) dx,$$

где c — какое-нибудь число (выбор его безразличен). Последнее равенство следует понимать так: если каждый из интегралов, стоящих справа, сходится, то сходится и интеграл, стоящий слева. Если же расходится хотя бы один из интегралов, стоящих справа, то расходится и интеграл, стоящий слева.

2. Интегралы от неограниченных функций. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна при $a \leq x < b$. Предположим далее, что эта функция стремится к бесконечности, когда $x \to b$. Так что на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ не ограничена. Положим

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если последний предел существует, то говорят, что интеграл

$$\int_a^b f(x)dx \tag{4.22}$$

сходится, а если этот предел не существует, то интеграл (4.22) называют *расходящимся*.

Подобным же образом равенством

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

дается определение интеграла функции $f(x)$, стремящейся к бесконечности при $x \to a$.

Пример 4.28. $\int_a^b \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\varepsilon\to 0+0}(\ln\varepsilon - \ln(b-a)) = +\infty$, интеграл расходится.

Пример 4.29. Выяснить, при каких значениях α сходится интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}.$$

Случай $\alpha = 1$ рассмотрен в примере 4.21. При $\alpha \neq 1$ имеем

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{\varepsilon^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{при } \alpha > 1, \\ \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{при } \alpha < 1. \end{cases}$$

Значит, данный интеграл сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha > 1$.

Все свойства для интегралов вида (4.17) и (4.21) переносятся и на только что введенные интегралы. В частности, имеет место теорема сравнения, аналогичная приведенной в п. 1.

Наконец, если функция $f(x)$ стремится к бесконечности при приближении к обеим концам промежутка $(a; b)$, то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a < c < b.$$

При этом, если сходятся оба интеграла в правой части последнего равенства, сходится и интеграл слева.

3. Гамма-функция. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx \quad (p = \text{const})$$

сходится при $p > 0$ (см. [7], т. II).

При $p > 0$ он обозначается $\Gamma(p)$ и называется гамма-функцией (введена Эйлером в 1729 г.). Укажем на два ее свойства:

1. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ (применяется формула интегрирования по частям).

2. Если n — натуральное число, то, используя свойство 1 и пример 4.21, получим

$\Gamma(n+1) = n!$

4.7. Геометрические приложения определенного интеграла

1. Вычисление площадей плоских фигур. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$. Известно (см. подразд. 4.3, п. 2), что если $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$, то площадь S криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, равна интегралу

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (4.23)$$

Если же $f(x) \leq 0$ на $[a; b]$, то $-f(x) \geq 0$ на $[a; b]$. Поэтому площадь S соответствующей криволинейной трапеции выразится формулой

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

или

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|. \qquad (4.24)$$

Если, наконец, кривая $y = f(x)$ пересекает ось Ox, то сегмент $[a; b]$ надо разбить на части, в пределах которых $f(x)$ не меняет знака, и к каждой такой части применить ту из формул (4.23) или (4.24), которая ей соответствует.

Пример 4.30. Найдем площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ и осью абсцисс при условии $0 \leq x \leq 2\pi$ (рис. 4.5).

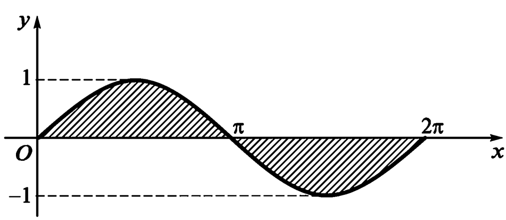


Рис. 4.5

Решение. Разбиваем сегмент $[0; 2\pi]$ на два сегмента $[0; \pi]$ и $[\pi; 2\pi]$. На первом из них $\sin x \geq 0$, на втором $-\sin x \geq 0$. Следовательно, исходя из формул (4.23) и (4.24), имеем, что искомая площадь

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| \cos x \Big|_0^{2\pi} \right| = 4.$$

2. Вычисление площади в полярных координатах. Пусть требуется определить площадь сектора OAB (рис. 4.6), ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой AB, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ — функция, непрерывная на сегменте $[\alpha; \beta]$.

Разобьем отрезок $[\alpha; \beta]$ на n частей точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$ и положим $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через λ: $\lambda = \max \Delta\varphi_k$. Разобьем данный сектор на n частей лучами $\varphi = \varphi_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$). Заменим k-й элементарный сектор круговым сектором радиуса $r(\xi_k)$, где $\xi_k \in [\varphi_{k-1}; \varphi_k]$. Тогда сумма $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\xi_k)\Delta\varphi_k$ — приближенно площадь сектора OAB. Отсюда

$$S = \frac{1}{2}\lim_{\lambda \to 0}\sum_{k=1}^{n} r^2(\xi_k)\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \tag{4.25}$$

Пример 4.31. Найдем площадь плоской фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1+\cos\varphi)$ (см. рис. 1.9).

Решение. Учитывая симметричность кривой относительно полярной оси, по формуле (4.25) получаем

$$S = a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= a^2\varphi\Big|_0^{\pi} + 2a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= a^2\pi + \frac{a^2}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

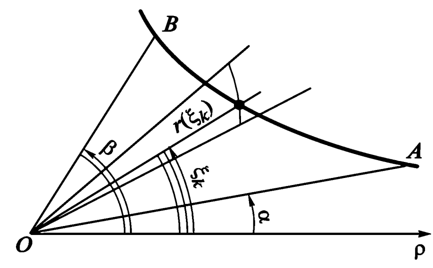


Рис. 4.6

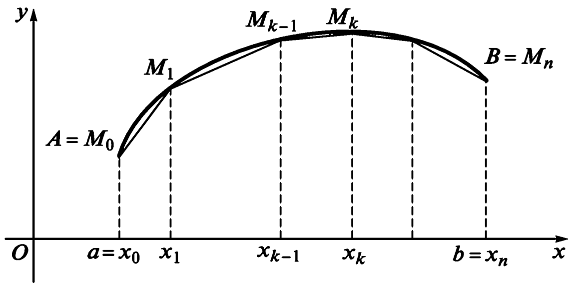


Рис. 4.7

3. Вычисление длины дуги. Пусть дуга AB (рис. 4.7) задана уравнением

$$y = f(x)\ (a \le x \le b), \tag{4.26}$$

где $f(x)$ — функция, имеющая на отрезке $[a; b]$ непрерывную производную.

Длиной дуги AB называется предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда длина наибольшего звена стремится к нулю.

Найдем длину l дуги AB. Впишем в дугу AB ломаную линию $M_0M_1...M_n$ (см. рис. 4.7). Пусть абсциссы точек M_0, M_1, M_2,..., M_n соответственно $a = x_0$, x_1, x_2,..., $x_n = b$ (ординаты этих точек обозначим соответственно через y_0, y_1, y_2,..., y_n). Имеем разбиение отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$. Длина отрезка $[x_{k-1}; x_k]$ равна $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Пусть $\lambda = \max \Delta x_k$. Через Δy_k обозначим приращение функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}; x_k]$. По теореме Пифагора $M_{k-1}M_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$. Но в силу формулы Лагранжа (см. подразд. 3.6, п. 3) $\Delta y_k = f'(\xi_k)\,\Delta x_k$, где ξ_k — некоторая промежуточная точка отрезка $[x_{k-1}; x_k]$. Отсюда $M_{k-1}M_k = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$, и, следовательно, длина ломаной линии $M_0M_1...M_n$

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda \to 0$, получаем

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx,$$

или

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \tag{4.27}$$

l — длина дуги AB.

Если же кривая AB задана в полярных координатах уравнением

$$r = r(\varphi)\ (\alpha \le \varphi \le \beta), \qquad (4.28)$$

то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 \quad r'^2}\, d\varphi. \qquad (4.29)$$

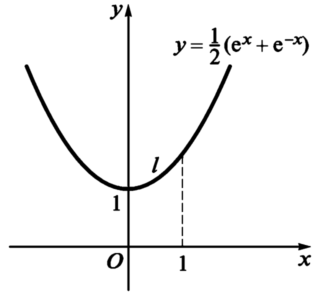


Рис. 4.8

Пример 4.32. Найдем длину дуги данной линии:

$$y=\frac{1}{2}(e^x \quad e^{-x}), 0 \quad x\le 1 \text{ (рис. 4.8).}$$

Решение. Имеем $y'=\frac{1}{2}(e^x \quad e^{-x})$ и по формуле (4.27) находим

$$l=\int_0^1\sqrt{1 \quad \frac{1}{4}(e^{2x} \quad 2 - e^{-2x})}\,dx \quad \frac{1}{2}\int_0^1 (e^x \quad e^{-x})\,dx \quad \frac{1}{2}(e^x \quad e^{-x})\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\left(e \quad \frac{1}{e}\right).$$

Пример 4.33. Вычислим длину окружности радиуса R.

Решение. Запишем уравнение окружности в полярных координатах: $r = R$ при $0 \le \varphi \le 2\pi$. По формуле (4.29) получим

$$l = \int_0^{2\pi} R\,d\varphi \quad 2\pi R. =$$

4. Вычисление объема. Рассмотрим тело B, содержащееся между плоскостями $x = a$ и $x = b$ (рис. 4.9). Пусть для каждого x из сегмента $[a; b]$ дана площадь сечения этого тела $Q(x)$, перпендикулярного к оси Ox. Найдем объем V данного тела при условии непрерывности $Q(x)$ в $[a; b]$. Разделим сегмент $[a; b]$ на n частей и через точки деления проведем плоскости, перпендикулярные к оси Ox. Эти плоскости разобьют тело B на слои. Выделим k-й слой, ограниченный плоскостями $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$. Объем этого слоя приближенно равен $Q(x_{k-1})\Delta x$. Образуем сумму $V_n = \sum_{k=1}^{n} Q(x_{k-1})\Delta x$.

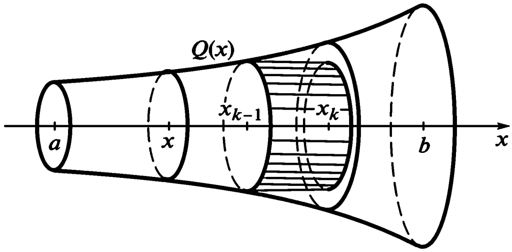


Рис. 4.9

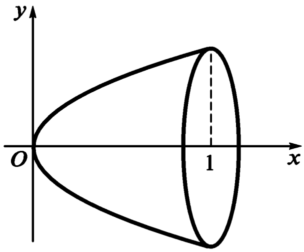


Рис. 4.10

Объем V тела B определим как $\lim\limits_{\lambda\to 0} V_n$. Этот предел существует в силу непрерывности $Q(x)$ на $[a;\ b]$ и равен $\int\limits_a^b Q(x)dx$. Итак,

$$V = \int\limits_a^b Q(x)dx.$$

В частности, если тело образовано поверхностью вращения линии $y = f(x)$ вокруг оси Ox в пределах изменения x от a до b, то $Q(x) = \pi f^2(x)$ и $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$, или, более кратко,

$$V = \pi\int\limits_a^b y^2 dx. \tag{4.30}$$

Пример 4.34. Найдем объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x$ и $x = 1$, вокруг оси Ox. Это тело называется *сегментом параболоида вращения* (рис. 4.10).

Р е ш е н и е. Согласно формуле (4.30) имеем

$$V = \pi\int\limits_0^1 x dx \quad \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \qquad =$$

Выполните задания

Непосредственным интегрированием или методом замены переменной вычислите следующие интегралы:

1. $\int x^6 dx$. **2.** $\int \sqrt[3]{x}dx$. **3.** $\int \frac{dx}{x^5}$. **4.** $\int (x - x^3)dx$. **5.** $\int (2+\sqrt{x})^2 dx$. **6.** $\int \frac{2+x}{x}dx$.

7. $\int x^2(1+2x)dx$. **8.** $\int \frac{dx}{x^2+16}$. **9.** $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$. **10.** $\int \sin 7x dx$. **11.** $\int 3^x dx$.

12. $\int (e^x + e^{-2x})dx$. **13.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$. **14.** $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$. **15.** $\int \cos 3x dx$.

16. $\int \frac{dx}{x^2-16}$. **17.** $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$. **18.** $\int e^{x+x^2}(1+2x)dx$. **19.** $\int (\sin x^2)x dx$.

20. $\int \cos^5 4x \sin 4x dx$. **21.** $\int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$. **22.** $\int e^{x^3+x^2-x+1}(3x^2+2x-1)dx$.

23. $\int \frac{(4-\ln x)^2}{x}dx$. **24.** $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. **25.** $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}$. **26.** $\int \frac{dx}{x^2-2x+1}$.

При нахождении интегралов от тригонометрических функций используйте тригонометрические формулы.

27. $\int (1-\sin^2 x)dx$. **28.** $\int \sin x \sin 5x dx$. **29.** $\int \sin 2x \cos 2x dx$.

30. $\int \cos 3x \cos \frac{4}{3} x dx$. **31.** $\int \sin^5 x dx$.

При нахождении следующих интегралов используйте метод интегрирования по частям:

32. $\int (2x-5)\mathrm{e}^{-3x} dx$. **33.** $\int x \cos 2x dx$. **34.** $\int x\mathrm{e}^{-2x} dx$. **35.** $\int (2x-3)\sin\frac{x}{2} dx$.

36. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$. **37.** $\int \arccos 2x dx$. **38.** $\int \mathrm{arcctg}\, 3x dx$. **39.** $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

40. $\int (x^2+1)\mathrm{e}^x dx$. **41.** $\int \ln^2 x dx$.

Применяя формулу Ньютона—Лейбница, вычислите определенные интегралы:

42. $\int_1^4 \sqrt{x} dx$. **43.** $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. **44.** $\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-2x} dx$. **45.** $\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx$. **46.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

47. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$. **48.** $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **49.** $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

Вычислите определенные интегралы методом подстановки:

50. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$. **51.** $\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1} dx$. **52.** $\int_0^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$. **53.** $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$.

54. $\int_{-12}^{-1} \sqrt{4-5x} dx$. **55.** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$. **56.** $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Вычислите определенные интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

57. $\int_1^{\mathrm{e}} \ln^2 x dx$. **58.** $\int_1^8 \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}}$. **59.** $\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x dx$. **60.** $\int_0^2 (3-2x)\mathrm{e}^{-3x} dx$.

Вычислите несобственные интегралы (или установите их расходимость):

61. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$. **62.** $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$. **63.** $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5x} dx$.

64. $\int_1^{+\infty} \frac{x+5}{x\sqrt[3]{x}} dx$. **65.** $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$. **66.** $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2} dx$.

67. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$. **68.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+\mathrm{e}^x)}$. **69.** $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$.

70. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 4$.

71. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = \mathrm{e}$.

72. Переходя к полярным координатам, вычислите площадь круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = 4$.

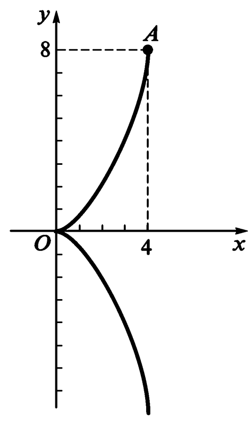


Рис. 4.11

73. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной первым витком спирали Архимеда $r = a\varphi$ и полярной осью.

74. Найдите длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки A (4; 8) (рис. 4.11).

75. Найдите длину кардиоиды $\rho = a(1 \quad \cos\varphi)$.

76. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}(e^x \quad e^{-x})$, $y = 0$, $x \quad 0$, $x \quad 1$.

77. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$ и расположенной в квадрантах I и II.

78. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной полуволной синусоиды $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$ и осью Ox.

Глава 5

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Определение и основные свойства функций нескольких переменных

1. Определение функции нескольких переменных. Понятие функции одной переменной не охватывает все зависимости, существующие в природе. Даже в самых простых задачах встречаются величины, значения которых определяются совокупностью значений нескольких величин.

Пример 5.1. Площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y, выражается формулой $S = xy$, т.е. значения S определяются совокупностью значений x и y.

Пример 5.2. Объем V прямоугольного параллелепипеда с ребрами, длины которых равны x, y, z, выражается формулой $V — xyz$, т.е. значения V определяются совокупностью значений x, y и z.

Для изучения подобных зависимостей вводится понятие *функции нескольких переменных*. Так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных, то ограничимся рассмотрением этих функций.

Переменная z называется *функцией двух независимых переменных x и y*, если некоторым парам значений x и y по какому-либо правилу или закону ставится в соответствие определенное значение x и y. Символически функция двух переменных обозначается так: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ и т.д.

Пара значений $(x; y)$ может рассматриваться как точка на плоскости. Поэтому, имея дело с функцией $z = f(x, y)$, часто говорят, что z есть функция точки $(x; y)$.

Множество пар значений, которые могут принимать переменные x и y, называется *областью определения* или *областью существования* функции. В случае явного аналитического задания функции область ее существования определяется самой формулой, задающей функцию.

Пример 5.3. Функция $z = x^2 + y$ задана для всевозможных x и y. Поэтому пара чисел $(x; y)$ может представлять собой координаты любой точки плоскости. В связи с этим говорят, что данная функция определена на всей плоскости.

Пример 5.4. Функция $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ определена (здесь речь идет лишь о действительных значениях z) только при $x^2+y^2 \le 1$, т.е. в круге, ограниченном окружностью $x^2+y^2=1$, включая эту окружность.

Пример 5.5. Функция $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ определена в круге $x^2+y^2<1$, т.е. в круге, ограниченном окружностью $x^2+y^2=1$, исключая эту окружность.

Таким образом, областью определения функции двух переменных служит вся плоскость или некоторая ее часть (говорят: область на плоскости — и обозначают G).

2. Геометрическое изображение функции двух переменных. Функции двух переменных допускают графическую иллюстрацию. *Графиком* функции $z=f(x, y)$, определенной на некотором множестве G точек плоскости xOy, называется множество точек $(x; y; z)$ пространства, у которых $(x; y)$ принадлежат G и $z=f(x, y)$. В наиболее простых случаях такой график представляет собой некоторую поверхность.

Пример 5.6. Графиком функции $z=1-x-y$ является плоскость, проходящая через точки (1; 0; 0), (0; 1; 0) и (0; 0; 1) (см. рис. 1.37).

Пример 5.7. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ (полусфера, рис. 5.1).

Пример 5.8. $z=x^2+y^2$ (параболоид вращения, рис. 5.2).

Функции трех (и большего числа) переменных не имеют наглядного геометрического представления.

3. Непрерывность функции двух переменных. Пусть функция $z=f(x, y)$ определена в области G. Возьмем точку $M_0(x_0; y_0)$ из этой области и дадим x_0 и y_0 соответственно приращения Δx и Δy, такие, чтобы точка $(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ принадлежала области G. Разность $\Delta z = f(x_0\, \Delta x; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0)$ называется *полным приращением функции* $z=f(x, y)$ в точке $(x_0; y_0)$.

По аналогии с функцией одной переменной непрерывность функции двух независимых переменных определяется так.

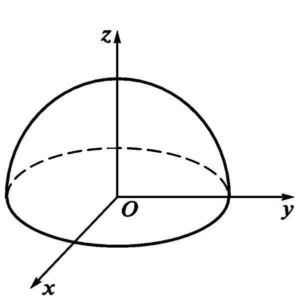


Рис. 5.1

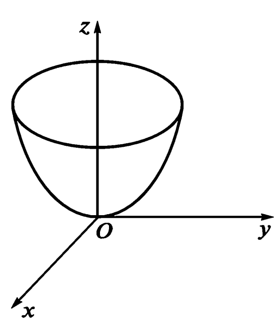


Рис. 5.2

Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной* при $x = x_0$; $y = y_0$ или в точке $(x_0; y_0)$, если ее полное приращение Δz стремится к нулю, когда $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, т.е.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right]=0.$$

Если функция непрерывна в каждой точке области G, то она называется непрерывной в этой области G.

5.2. Частные производные и дифференциалы

1. Частные производные первого порядка. ***Частной производной функции*** нескольких переменных по какой-нибудь переменной в рассматриваемой точке называется обычная производная по этой переменной, считая другие переменные фиксированными (постоянными). Например, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ частные производные определяются так:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y},$$

если эти пределы существуют. Используются и другие обозначения:

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ z'_x,\ f'_x(x,y),\quad \frac{\partial f}{\partial y},\ z'_y,\ f'_y(x,y).$$

Из этого определения ясно, что правила вычисления частных производных остаются теми же, что и для функций одной переменной, и только требуется каждый раз помнить, по какой переменной ищется производная.

Пример 5.9. Если $z = x^2 + y^2$, то $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$.

Пример 5.10. Если $z = xy + xy^2 - 1$, то $z'_x = y + y^2$, $z'_y = x + 2xy$.

2. Дифференциал функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные производные z'_x и z'_y.

Произведение $z'_x\Delta x$ называют ***частным дифференциалом*** по x функции z и обозначают символом $d_xz = z'_x\Delta x$ или $d_xz = z'_xdx$, где $dx = \Delta x$ — приращение независимой переменной x. Аналогично $d_yz = z'_ydy$, где $dy = \Delta y$.

Сумма частных дифференциалов функции z называется ее ***полным дифференциалом*** и обозначается символом dz. Таким образом,

$$dz = z'_xdx + z'_ydy.$$

Пример 5.11. Если $z = (x + y)^2$, то

$$z'_x = z'_y = 2(x + y) \text{ и } dz = 2(x + y)\,(dx + dy).$$

Очевидно, для полного дифференциала справедливы формулы вида 1 — 5 из таблицы дифференциалов (см. подразд. 3.3, п. 4).

1. $dC = 0$.
2. $d(u + v) = du + dv$.
3. $d(uv) = vdu + udv$.
4. $d(Cu) = Cdu$.
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Здесь C — постоянная, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — функции, имеющие непрерывные частные производные.

3. Производные и дифференциал от сложной функции. Пусть $z = f(x, y)$ где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Тогда в конечном итоге z будет функцией одной переменной t. Предположим, что z'_x, z'_y непрерывны и $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ существуют. Найдем $\dfrac{dz}{dt}$. Дадим переменной t приращение Δt. Тогда x, y, а следовательно и z, получат свои приращения Δx, Δy и Δz. Имеем, учитывая формулу Лагранжа (см. подразд. 3.6, п. 3).

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] +$$
$$+ [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] = f'_x(x + \Theta\Delta x, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, y + \Theta_1\Delta y)\Delta y,$$
$$0 < \Theta < 1,\ 0 < \Theta_1 < 1,$$

откуда

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x + \Theta\Delta x, y + \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y + \Theta_1\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta t \to 0$ и учитывая непрерывность частных производных z'_x, z'_y получим:

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f'_y(x, y)\frac{dy}{dt}$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Пусть теперь $x = \varphi(t, \tau)$, $y = \psi(t, \tau)$ (здесь предполагается существование первых производных от функций x, y по t и τ). В этом случае z будет функцией двух независимых переменных t и τ и встает вопрос о вычислении частных производных z'_t и z'_τ. Но этот случай не отличается существенно от предыдущего, ибо при вычислении частной производной функции двух переменных мы одну из них фиксируем и у нас остается функция только от одной переменной. Следовательно, для этого случая только что полученную формулу можно переписать в виде:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Аналогично

$$\frac{dz}{d\tau}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{d\tau}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{d\tau}.$$

Предположим еще, что x'_t, x'_τ, y'_t и y'_τ непрерывны.

Если бы x и y были независимыми переменными, то полный дифференциал функции z был бы равен $dz = z'_x dx + z'_y dy$. В данном случае z зависит через посредство x, y, от переменных t и τ, следовательно, $dz = z'_t dt + z'_\tau d\tau$.

Но

$$z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t \text{ и } z'_\tau = z'_x x'_\tau + z'_y y'_\tau.$$

Поэтому

$$dz = (z'_x x'_t + z'_y y'_t)dt + (z'_x x'_\tau + z'_y y'_\tau)d\tau = z'_x(x'_t dt + x'_\tau d\tau) + z'_y(y'_t dt + y'_\tau d\tau).$$

Нетрудно видеть, что выражения, стоящие в скобках, являются дифференциалами функций x, y, поэтому можно записать:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Мы пришли к той же форме записи дифференциала, что и в случае, когда x и y были независимыми переменными.

Пример 5.12. Если $z = xy$, где $x = t\cos 2\tau$, $y = t^2\tau$, то $z'_t = y\cos 2\tau + 2xt\tau$, $z'_\tau = -2yt\sin 2\tau + xt^2$.

4. Неявные функции и их дифференцирование. Как уже отмечалось (подразд. 2.4, п. 4), если уравнение, с помощью которого задается функция одной переменной x, не разрешено относительно y, то эта функция называется *пеленой*. Разрешая это уравнение относительно y, мы получаем ту же функцию, но уже заданную в явной форме. Однако часто бывает, что разрешить такое уравнение относительно y невозможно (например, $2^y - 2y + x^2 - 1 = 0$) или нецелесообразно; в этом случае уравнение так и оставляют неразрешенным, в общем виде (после переноса всех членов в левую часть):

$$F(x, y) = 0. \tag{5.1}$$

В связи с этим встает вопрос о том, как найти производную неявной функции, не разрешая уравнения (5.1) относительно y.

Если в уравнении (5.1), определяющем неявную функцию $y = f(x)$, задавать значения независимой переменной x, то для нахождения соответствующего значения y надо решать уравнение. Теперь если в это уравнение подставить его решение, то получится тождество. Поэтому можно сказать также, что неявная функция $y = f(x)$, определенная уравнением (5.1), — это такая функция, которая, будучи подставлена в уравнение (5.1), обращает его в тождество. Дифференцируя это тождество по x согласно правилу дифференцирования сложной функции, получим:

$$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\frac{du}{dx}=0,\ \text{где } y=f(x).$$

Отсюда при $F'_y(x, y) \neq 0$ вытекает формула для производной неявной функции

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Пример 5.13. Пусть y как функция от x задана соотношением $e^{xy}-x-y=$ $=0$. Найдем $\frac{dy}{dx}$.

Решение. Так как для $F(x, y) = e^{xy} - x - y$ имеем:

$$F'_x(x, y) = ye^{xy} - 1,$$

$$F'_y(x, y) = xe^{xy} - 1,$$

то согласно формуле для производной неявной функции

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-ye^{xy}}{xe^{xy}-1}.$$

5.3. Частные производные и дифференциалы высших порядков

1. Частные производные высших порядков. Частные производные функции нескольких переменных сами являются функциями этих переменных и могут иметь частные производные. Для исходной функции эти последние производные будут частными производными *второго порядка*. Так, для функции $z=f(x,y)$ двух независимых переменных можно определить (предполагается, что все производные существуют) четыре частные производные второго порядка, которые обозначаются символами

$$z''_{x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\quad\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\qquad z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\quad\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\quad\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\qquad z''_{y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\quad\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Частные производные z''_{xy} и z''_{yx}, отличающиеся порядком дифференцирования, называют *смешанными частными производными второго порядка.*

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и старших порядков.

Пример 5.14. Найдем частные производные второго порядка функции $z=e^{x-2y}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$z'_x = e^{x-2y}, \quad z'_y = -2e^{x-2y},$$

$$z''_{x^2} = e^{x-2y}, \quad z''_{xy} = -2e^{x-2y}, \quad z''_{yx} = -2e^{x-2y}, \quad z''_{y^2} = 4e^{x-2y}.$$

Здесь $z''_{xy} = z''_{yx}$. Оказывается, имеет место следующая теорема (см., например, [10]).

Теорема 5.1. *Смешанные производные второго порядка равны, если они непрерывны:* $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

С л е д с т в и е. ***Смешанные производные высших порядков равны, если они непрерывны и получены в результате дифференцирования по одним и тем же переменным одинаковое число раз, но может быть в разной последовательности.***

Покажем это на примере:

$$z'''_{x^2y} = ((z'_x)'_x)'_y = ((z'_x)'_y)'_x = ((z'_y)'_x)'_x,$$

т.е.

$$z'''_{x^2y} = z'''_{xyx} = z'''_{yx^2}.$$

Здесь мы дважды пользовались только что отмеченной теоремой: первый раз применительно к функции z'_x (мы изменили порядок ее дифференцирования), второй раз использовали равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$. В общем случае схема рассуждений аналогична.

2. Признак полного дифференциала. Выясним, при каких условиях выражение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{5.2}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка, является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$, или, кратко, полным дифференциалом.

Теорема 5.2. *Выражение* (5.2) *есть полный дифференциал тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

3. Дифференциалы высших порядков. Заметим прежде всего, что для функции нескольких переменных справедливы те же общие правила дифференцирования, что и для функции одной переменной (см. подразд. 3.3, п. 4):

I. $d(u + v) = du + dv$ ($u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$).

II. $d(uv) = vdu + udv$.

III. $d(Cu) = Cdu$ ($C = \text{const}$).

IV. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$ ($v \neq 0$).

Например, имеем

$$d(u+v) = (u+v)'_x dx + (u+v)'_y dy = u'_x dx + v'_x dx + u'_y dy + v'_y dy =$$

$$= (u'_x dx + u'_y dy) + (v'_x dx + v'_y dy) = du + dv.$$

Пусть имеется функция $z = f(x, y)$ независимых переменных x и y, обладающая непрерывными частными производными второго порядка. Рассмотрим ее полный дифференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(где dx и dy — произвольные приращения), который назовем ***полным дифференциалом первого порядка*** (или, кратко, ***первым дифференциалом***).

Так как $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ по предположению имеют непрерывные частные производные первого порядка, то от функции dz, в свою очередь, можно взять полный дифференциал $d(dz)$. Так получим ***полный дифференциал второго порядка*** (или, кратко, ***второй дифференциал***), который обозначается d^2z.

Аналогично, потребовав существование непрерывных частных производных третьего, четвертого,..., n-го порядков, можно получить полные дифференциалы соответственно третьего, четвертого, ..., n-го порядков.

Найдем выражение для второго дифференциала через частные производные. Пользуясь правилами I, III (dx и dy не зависят от x и y, т. е. рассматриваются как постоянные) и приведенной в п. 1 теоремой, можно записать

$$dz = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

(здесь $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$).

Последнюю сумму можно записать кратко так:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

Этот символ расшифровывается следующим образом. Сначала раскрываются скобки, как будто слагаемые в них числа, а число 2 — показатель степени. Затем числители полученных дробей умножаются на z. Формула для d^2z обобщается на случай d^nz:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z.$$

Этот символ расшифровывается так же, как и в случае $n = 2$.

Подчеркнем, что в случае зависимых переменных x и y эти формулы, вообще говоря, не имеют места, так как в этом случае x и y являются функциями независимых переменных.

Пример 5.15. Если $z = (x + y)^2$, то $z''_{x^2} = z''_{xy} = z''_{y^2} = 2$ и $d^2 z = 2(dx + dy)^2$.

5.4. Экстремум функций двух переменных

1. Необходимые условия существования экстремума. Понятие максимума и минимума можно распространить и на функции нескольких переменных (здесь для случая двух переменных).

Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ максимум (минимум), если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x; y)$ из этой окрестности и отличных от M_0 выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \; (f(x_0, y_0) < f(x, y))$$

или

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0 \; (\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0).$$

Теорема 5.3 (необходимые условия существования экстремума). *Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремум и в этой точке существуют частные производные z'_x и z'_y, то*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Доказательство. Из определения экстремума следует, что функция $f(x, y_0)$, рассматриваемая как функция одной переменной x, при $x = x_0$ также имеет экстремум. Поэтому (см. подразд. 3.7, п. 2) $f'_x(x_0, y_0) = 0$. Аналогично получаем равенство $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Примечание. Приведенные условия существования экстремума не являются достаточными, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример 5.16. $z = x^3 + y^3$, $z'_x = 3x^2, z'_y = 3y^2$. Производные равны нулю в точке (0; 0), но экстремума эта функция в точке (0; 0) не имеет, так как в любой окрестности этой точки она принимает значения разных знаков, а в самой точке (0; 0) $z = 0$.

2. Достаточные условия существования экстремума. Достаточные условия существования экстремума для функций нескольких переменных имеют более сложный вид, чем для функций одной переменной. Приведем эти условия для случая двух переменных без доказательства (см. [7]).

Теорема 5.4 (достаточные условия существования экстремума). *Пусть функция $f(x, y)$, непрерывная вместе со своими частными производными первого и второго порядков в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, удовлетворяет условиям*

$$f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0.$$

Обозначим

$$A=f''_{x^2}(x_0,y_0),\ B=f''_{xy}(x_0,y_0),$$

$$C=f''_{y^2}(x_0,y_0),\ D=AC-B^2.$$

Тогда

1) *если $D>0$, то в точке M_0 функция $f(x, y)$ имеет экстремум, а именно максимум при $A<0$ и минимум при $A>0$;*

2) *если же $D<0$,* то *в точке M_0 функция $f(x, y)$ экстремума не имеет.*

Пример 5.17. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$. Ее частные производные $z'_x=3x^2-3y, z'_y=3y^2-3x$ обращаются в нуль в точках $M_0(0; 0)$ и $M_1(1; 1)$. Ее вторые производные равны $z''_{x^2}=6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{y^2}=6y$. В точке M_0 имеем $D = -9 < 0$, следовательно, экстремума в этой точке нет. В точке M_1 имеем $D = 27 > 0$, причем $A = 6 > 0$, следовательно, в точке M_1 — минимум.

Примечание. Отметим, что в случае $D = 0$ экстремум может быть, а может и не быть.

Пример 5.18. $z = x^3 + y^3$. В точке (0; 0), где $D = 0$, эта функция, как показано выше (см. п. 1), экстремума не имеет.

Пример 5.19. $z = x^4 + y^4$. В точке (0; 0), где $D = 0$, эта функция имеет минимум, потому что в любой окрестности этой точки данная функция положительна, а в самой точке (0; 0) $z = 0$.

3. Метод наименьших квадратов. В естествознании приходится пользоваться эмпирическими формулами, составленными на основе опыта и наблюдений. Один из наилучших методов получения таких формул — это способ *наименьших квадратов*. Изложим идею этого способа, ограничиваясь случаем линейной зависимости двух величин.

Пусть требуется установить зависимость между двумя величинами x и y (например, температурой и удлинением металлического стержня). Производим соответствующие измерения (например, n измерений) и результаты измерений сводим в таблицу:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Будем рассматривать x и y как прямоугольные координаты точек на плоскости. Предположим, что точки $(x_k; y_k)$, $k = 1,..., n$ группируются вдоль некоторой прямой линии (рис. 5.3). Естественно в этом случае считать, что между x и y существует приближенная линейная зависимость, т. е.

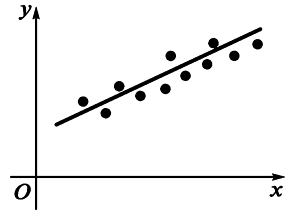


Рис. 5.3

$$y = ax + b. \tag{5.3}$$

Назовем *уклонением* (или *отклонением*) разность между точным значением функции (5.3) в точке x_k и соответствующим значением y_k из таблицы: $\varepsilon_k = ax_k + b - y_k$. Сумма квадратов уклонений — функция величин a и b:

$$U(a,b) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2.$$

В методе наименьших квадратов на величины a и b накладывается условие — они должны доставлять минимум сумме квадратов уклонений $U(a, b)$. Требуется найти a и b, удовлетворяющие этому условию. Для этого (см. п. 1) необходимо, чтобы

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 2\sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - y_k)x_k = 2a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2b\sum_{k=1}^{n} x_k - 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial b} = 2\sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - y_k) = 2a\sum_{k=1}^{n} x_k + 2bn - 2\sum_{k=1}^{n} y_k = 0.$$

Отсюда

$$\begin{cases} a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + bn = \sum_{k=1}^{n} y_k. \end{cases} \tag{5.4}$$

Это — окончательный вид, так называемой, нормальной системы способа наименьших квадратов. Пусть $a = a_0$, $b = b_0$ — решение системы (5.4). Можно доказать, что a_0 и b_0 доставляют величине $U(a, b)$ минимум. Функция (5.3) при $a = a_0$ и $b = b_0$ дает эмпирическую формулу $y = a_0 x + b_0$.

Пример 5.20. Результаты измерения величин x и y даны в таблице:

x	–2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость $y = ax + b$, способом наименьших квадратов определить коэффициенты a и b. Здесь $n = 5$,

$$\sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 25,\quad \sum_{k=1}^{5} x_k \quad 5,\quad \sum_{k=1}^{5} x_k y_k = 16{,}5,\quad \sum_{k=1}^{5} y_k = 8,$$

и нормальная система (5.4) принимает вид

$$\begin{cases} 25a + 5b = 16{,}5, \\ 5a + 5b = 8. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $a = 0{,}425$, $b = 1{,}175$. Поэтому $y = 0{,}425x + 1{,}175$.

Выполните задания

Найдите область существования следующих функций:

1. $u = 4 - x + 2y$. **2.** $u = \dfrac{3}{x^2 + y^2}$. **3.** $u = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$. **4.** $u = \arccos(x \quad y)$. +

5. $u = \ln(x \quad y) + x + y - 1.+$**6.** $u = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$. **7.** $u = \arcsin(x^2 \quad y^2)$. +

8. $u = \dfrac{xy}{x - y}$. **9.** $u = \dfrac{1}{x} \quad \dfrac{1}{y}+$. **10.** $u = \ln x \quad \ln y$: **11.** $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad \dfrac{1}{\sqrt{y}}+$.

Найдите частные производные первого порядка от следующих функций:

12. $u = x^3 \quad 3x^2 y \quad y^3$. **13.** $u = x^3 \quad 3x^2 y \quad y^2$. **14.** $u = \sqrt{x \quad 3y+}$

15. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. **16.** $u = \operatorname{arctg}(2x \quad y)$. **17.** $u = (1 \quad x)^{y^2}$. **18.** $u = (1 \quad xy)^y$.

19. $u = x^3 y^4 \quad 2x \ln y \quad x^y$. **20.** $u = x^3 \sin y \quad y^4$. **21.** $u = x^6 \quad y^4$.

В следующих примерах для функции u найдите u'_x и u'_y в указанной точке:

22. $u = \dfrac{x + y}{x - y}$; $A(2;\ 1)$. **23.** $u = \dfrac{1 - xy}{1 + xy}$; $A(0;\ 1)$. **24.** $u = x\sqrt{y} \quad \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$; $B(1;\ 1)$.

Найдите полные дифференциалы первого порядка от функций:

25. $u = \dfrac{5x + 3y}{9x - 2y}$. **26.** $u = \ln(3x \quad 2y)$. **27.** $u = e^{2x} \sin 3y$. **28.** $u = xe^{-xy}$.

29. $u = x^2 \quad 3xy$. **30.** $u = \dfrac{x}{y}$. **31.** $u = \ln(xy)$. **32.** $u = x^2 + xy^2 + \sin y$.

В следующих упражнениях считайте, что $x = x(t)$, $y = y(t)$, и найдите $\dfrac{du}{dt}$:

33. $u = ye^x \quad 1$. **34.** $u = \cos\dfrac{x}{y}$. **35.** $u = \ln(4 \quad x^2 \quad y^2)$.

Найдите $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}$, считая, что $x = x(t,\ \tau)$, $y = y(t,\ \tau)$:

36. $u = e^{\frac{y^2}{x}}$. **37.** $u = x \operatorname{tg} y$.

38. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ от функций, заданных неявно:

а) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; б) $xy - \ln y = 0$; в) $ye^x + e^y = 0$.

Найдите частные производные второго порядка от функций:

39. а) $u = x^3 -\quad 4x^2 + y \quad 5y^2$; б) $u = \mathrm{e}^x \ln y$. **40.** $u = \sin(x \quad y)$. **41.** $u = x \operatorname{arctg} y$.
42. $u = \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}$.

43. Выясните, какие из данных выражений являются полными дифференциалами: $(x^2 + y^2)dx + 2xydy$; $\dfrac{2x}{x^2 + y^2}dx + \dfrac{2y}{x^2 + y^2}dy$; $2ydx - 2xdy$?

Напишите дифференциалы второго порядка для следующих функций:

44. $u = x^2 \quad y^2 +.$ **45.** $u = x + \quad xy + \ 1$. **46.** $u = x \sin^2 y$. **47.** $u = \mathrm{e}^{x+y^2}$.

Исследуйте на экстремум следующие функции:

48. $u = 2x^2 \quad 6 + xy \quad 5 + y^2 \quad x - \ 4 + y \quad 5 -$. **49.** $u = 2x^3 + xy^2 - 216x$.

50. $u = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$. **51.** $u = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$.

52. Найдите прямоугольный параллелепипед наибольшего объема при данной сумме $12a$ всех его ребер.

53. Найдите размеры открытого прямоугольного бассейна объемом V, на облицовку которого надо затратить минимум материала.

54. В таблице приведены данные о внесении минеральных удобрений и урожае сахарной свеклы с 1 га сельхозугодий за 5 лет:

Год	Минеральные удобрения, ц	Урожай с 1 га, т
2007	4	20
2008	5	24
2009	6	29
2010	8	35
2011	9	50

Предполагая линейную зависимость урожайности от количества внесенных удобрений $y = ax + b$, найдите по этим данным коэффициенты a и b, применяя способ наименьших квадратов.

Глава 6

РЯДЫ

6.1. Числовые ряды

1. Основные понятия. Пусть дана бесконечная последовательность чисел a_1, a_2, ... , a_n, ...

Определение. Символ

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{6.1}$$

называется ***числовым рядом*** или просто ***рядом***, а числа a_1, a_2, ..., a_n, ... называются ***членами ряда***. Вместо (6.1), пользуясь знаком суммы, кратко пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Суммы конечного числа членов ряда (6.1):

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \ldots$$

называются *частичными* суммами (или *отрезками*) ряда (6.1). Рассмотрим последовательность

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots . \tag{6.2}$$

Определение. Если существует предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд (6.1) называют *сходящимся*, а число S — *суммой* этого ряда. В этом случае пишут

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если последовательность (6.2) не имеет предела, то ряд (6.1) называют *расходящимся*. Расходящийся ряд суммы не имеет.

Пример 6.1. Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии $1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, \ldots$:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots . \tag{6.3}$$

Если $q \neq 1$, то, как известно,

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^{n-1} \cdot q - 1}{q - 1},$$

или

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

При $|q| < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$, т.е. ряд (6.3) при $|q| < 1$ сходится и сумма его равна $\frac{1}{1-q}$.

При $q = 1$ получаем ряд

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots .$$

Следовательно, $S_n = n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд (6.3) при $q = 1$ расходится.

Пример 6.2. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \qquad (6.4)$$

Очевидно,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n+1} \; (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому

$$S_n = \left(1 \quad \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \quad \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 \quad \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Следовательно, ряд (6.4) сходится и его сумма равна 1.

2. Основные свойства рядов. Если в ряде (6.1) отбросить конечное число первых членов, например m членов, то получим ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots, \qquad (6.5)$$

который называется m-м *остатком* ряда (6.1).

Теорема 6.1. *Ряд* (6.5) *сходится* (*или расходится*) *одновременно с рядом* (6.1).

Доказательство. Обозначим

$$S'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k}.$$

Имеем

$$S'_k = S_{m+k} - S_m. \qquad (6.6)$$

Отсюда следует, что существование или отсутствие предела при $k \to \infty$ частичной суммы одного ряда влечет за собой существование или отсутствие предела частичной суммы другого ряда.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. *При исследовании ряда на сходимость можно игнорировать конечное число его первых членов.*

Пусть ряд (6.1) сходится. Тогда согласно теореме 6.1 сходится и ряд (6.5), значит, существует его сумма. Обозначим ее через r_m. Перейдя к пределу в (6.6) при $k \to \infty$, получим

$$r_m = S \quad S_{\overline{m}},$$

r_m есть та погрешность, которую мы допускаем, если вместо суммы S сходящегося ряда (6.1) берем сумму m первых его членов. Так как

$$\lim_{m\to\infty} r_m = \lim_{m\to\infty}(S - S_m) = S - S = 0, \tag{6.7}$$

то погрешность уменьшается с ростом m. Следовательно, абсолютная величина остатка

$$|r_m| = |S \quad S_{\overline{m}}|$$

будет как угодно мала, если только число m взято достаточно большим. Таким образом, мы всегда имеем возможность подсчитать приближенно сумму сходящегося ряда, взяв достаточно большое число первых его членов.

Однако большую трудность представляет выяснение величины возникающей ошибки, т.е. оценки $|r_m|$. Задача состоит в том, чтобы по данному $\varepsilon > 0$ найти такое (наименьшее) m, чтобы выполнялось неравенство $|r_m| < \varepsilon$. В дальнейшем (см. п. 4) мы покажем, как иногда можно оценивать величину ошибки и тем самым устанавливать, сколько нужно брать первых членов ряда для получения его суммы с требуемой точностью.

Заметим, что полученное выше соотношение (6.7) отражает следующая теорема.

Теорема 6.2. *Предел суммы r_m m-го остатка сходящегося ряда* (6.1) *при $m \to \infty$ равен нулю.*

Теорема 6.3 (необходимый признак сходимости ряда). *Общий член a_n сходящегося ряда* (6.1) *стремится к нулю при неограниченном возрастании n*, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{6.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ряд (6.1) сходится. Имеем $a_n = S_n - S_{n-1}$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

С л е д с т в и е 2. *Если общий член a_n ряда* (6.1) *при $n \to \infty$ не стремится к нулю, то этот ряд расходится.*

Пример 6.3. Для ряда (6.3), у которого $|q| \geq 1$, имеем $|q|^{n-1} \geq 1$ для $n = 1, 2, \ldots$, т.е. q^{n-1} не стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому такой ряд расходится.

Примечание 1. Отметим, что условие (6.8) не является достаточным для сходимости ряда. Действительно, для ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots, \tag{6.9}$$

называемого *гармоническим* рядом,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Однако этот ряд расходится, что можно установить рассуждениями от противного. Предположим, что ряд (6.9) сходится и его сумма равна S. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0,$$

что противоречит неравенству

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, гармонический ряд расходится.

Теорема 6.4. *Если ряд* (6.1) *сходится и его сумма равна* S, *то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n, \tag{6.10}$$

где c *— произвольное число, также сходится и его сумма равна* cS.

Доказательство. Пусть S_n и σ_n — частичные суммы соответственно рядов (6.1) и (6.10). Тогда

$$\sigma_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = cS_n.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}cS_n = c\lim_{n\to\infty}S_n = cS.$$

Теорема доказана.

Пример 6.4. С учетом примера 6.1 (см. п. 1) на основании теоремы 6.4 заключаем, что при $|q|<1$ ряд

$$c+cq+cq^2+\ldots+cq^{n-1}+\ldots,$$

где c — произвольное число, сходится.

Аналогично теореме 6.4 устанавливается теорема 6.5.

Теорема 6.5. *Если ряд* (6.1) *и ряд*

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$$

сходятся и их суммы соответственно равны S *и* σ, *то и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$

сходится и его сумма равна $S+\sigma$.

П р и м е ч а н и е 2. При условии теоремы 6.5 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$$

также сходится и его сумма равна $S - \sigma$.

Наконец, заметим (см. [10]), что если ряд (6.1) сходится и имеет сумму S, то члены его можно любым образом сгруппировать скобками (однако не переставляя их), например,

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \dots,$$

образуя новый ряд, члены которого равны суммам чисел, стоящих в скобках. Новый ряд будет сходящимся и притом к S.

Однако раскрытие скобок в сходящемся ряде не всегда возможно. Так, ряд

$$(1-1)+(1-1)+\dots+(1-1)+\dots$$

сходится, а ряд

$$1-1+1-1+\dots+1-1+\dots \tag{6.11}$$

расходится (общий член ряда (6.11) не стремится к нулю).

3. Положительные ряды.

О п р е д е л е н и е. *Положительным рядом* называется ряд, члены которого неотрицательны.

Пусть дан положительный ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \tag{6.12}$$

т.е. $a_n \geq 0$ (n = 1, 2, ...). Тогда, очевидно,

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n \, (n = 1, 2, \dots),$$

т.е. последовательность S_1, S_2, ..., S_n, ... является неубывающей.

Это с учетом приведенного в подразд. 2.3, п. 1 свойства 2 позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 6.6. *Для того, чтобы положительный ряд* (6.12) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена сверху.*

Теорема 6.7 (признак сравнения рядов). *Пусть даны два положительных ряда*

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots, \tag{6.13}$$

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots . \tag{6.14}$$

Если члены ряда (6.13) *не превосходят соответствующих членов ряда* (6.14)

$$b_n \leq c_n \, (n = 1, 2, \dots), \tag{6.15}$$

то из сходимости ряда (6.14) *следует сходимость ряда* (6.13), *а из расходимости ряда* (6.13) *следует расходимость ряда* (6.14).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначив через B_n и C_n соответственно частичные суммы рядов (6.13) и (6.14), в силу неравенства (6.15) будем иметь

$$B_n \le C_n,\ n = 1, 2, 3, \dots \,. \tag{6.16}$$

Если ряд (6.14) сходится, то по теореме 1 частичные суммы C_n ограничены сверху:

$$C_n \le L\ (L = \mathrm{const}),\ n \quad 1, 2, 3, \dots \,. \tag{6.17}$$

Из неравенств (6.16) и (6.17) имеем $B_n \le L$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и, значит, согласно той же теореме 6.6 ряд (6.13) сходится.

Пусть теперь ряд (6.13) расходится. Тогда расходится и ряд (6.14). В противном случае согласно только что доказанному сходился бы и ряд (6.13).

П р и м е ч а н и е. Ввиду следствия 1 (п. 2) теорема 6.2 остается справедливой, если условие (6.15) выполняется не для всех n, а лишь начиная с некоторого n.

Пример 6.5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}. \tag{6.18}$$

Сравниваем данный ряд со сходящимся рядом (см. п. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Имеем

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}\ (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Отсюда согласно теореме 6.7 получаем, что ряд (6.18) сходится. Попутно отметим, что тогда в силу следствия 1 (п. 2) сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{6.19}$$

Теорема 6.8 (признак Даламбера[1]). *Если члены положительного ряда* (6.12) *таковы, что существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho,$$

то при $\rho < 1$ *ряд* (6.12) *сходится, а при* $\rho > 1$ *ряд* (6.12) *расходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\rho - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \varepsilon. \tag{6.20}$$

[1] Жан Лерон Даламбер (1717 — 1783) — французский математик.

Если $\rho < 1$, то выберем ε столь малым, чтобы $\rho + \varepsilon$ было меньше единицы. Полагая $\rho + \varepsilon = q$, на основании правого неравенства (6.20) имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q, \quad \text{или} \quad a_{n+1} < a_n q,$$

для $n = N + 1, N + 2, \ldots$. Давая n эти значения, из последнего неравенства получаем

$$a_{N+2} < a_{N+1}q,$$
$$a_{N+3} < a_{N+2}q < a_{N+1}q^2,$$
$$a_{N+4} < a_{N+3}q < a_{N+1}q^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

т.е. члены ряда

$$a_{N+2} + a_{N+3} + a_{N+4} + \ldots \tag{6.21}$$

меньше соответствующих членов сходящегося ряда

$$a_{N+1}q + a_{N+1}q^2 + a_{N+1}q^3 + \ldots$$

(см. пример 6.4).

Тогда по признаку сравнения ряд (6.21) сходится, и, следовательно, согласно теореме 6.1 сходится и ряд (6.12).

Пусть теперь $\rho > 1$. Возьмем ε столь малым, чтобы $\rho - \varepsilon > 1$. Тогда при $n > N$ в силу левой части неравенства (6.20) будет выполняться неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, или $a_{n+1} > a_n$. Таким образом, члены ряда (6.12), начиная с номера $n = N + 1$, возрастают с увеличением их номеров, т.е. общий член ряда (6.12) a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, согласно следствию 2 (п. 2) ряд (6.12) расходится.

Примечания. 1. При $\rho = 1$ признак Даламбера на вопрос о том, сходится или расходится ряд, ответа не дает. В самом деле, для гармонического ряда $\rho = 1$, причем этот ряд расходится (см. п. 2, примечание 1). Вместе с тем для ряда (6.19) также $\rho = 1$, но этот ряд сходится (см. пример 1).

2. Из доказательства признака Даламбера следует, что при $\rho > 1$ общий член a_n ряда (6.12) не стремится к нулю при $n \to \infty$.

3. Ряд (6.12) будет расходиться и в том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, так как тогда, начиная с некоторого номера $n = N$, будет $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, и, значит, a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Пример 6.6. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)} = 0 \quad k$$

Пример 6.7. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}>1.$$

4. Знакочередующиеся ряды. *Знакочередующимся рядом* называют ряд вида

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots,\tag{6.22}$$

где $a_n>0$ ($n=1, 2, \ldots$).

Теорема Лейбница. *Если члены ряда* (6.22) *по абсолютной величине монотонно убывают,*

$$a_{n+1}<a_n\ (n=1,2,\ldots)\tag{6.23}$$

и общий член стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\tag{6.24}$$

то ряд (6.22) *сходится. При этом его сумма — положительное число, меньшее первого члена этого ряда.*

Доказательство. Частичную сумму S_{2m} можно представить двояко:

$$S_{2m}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2m-1}-a_{2m}),\tag{6.25}$$

$$S_{2m}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots-(a_{2m-2}-a_{2m-1})-a_{2m}.\tag{6.26}$$

Здесь в каждой круглой скобке разность положительна в силу условия (6.23). Из (6.25) следует, что $S_{2m}>0$ и последовательность $\{S_{2m}\}$ монотонно возрастающая. Из (6.26) видно, что $S_{2m}<a_1$, т.е. $\{S_{2m}\}$ ограничена. Следовательно (см. подразд. 4.3, п. 1, свойство 3), эта последовательность имеет предел

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m}=S,\tag{6.27}$$

причем

$$0<S<a_1.\tag{6.28}$$

Далее с учетом (6.27) и (6.25) имеем

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m+1}=\lim_{m\to\infty}S_{2m}+\lim_{m\to\infty}a_{2m+1}=S.\tag{6.29}$$

Из (6.27) и (6.29) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, т.е. ряд (6.22) сходится, причем в силу (6.28)

$$0<S<a_1.$$

Пример 6.8. Ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

сходится, так как условия теоремы Лейбница здесь выполнены.

Следствие. *Остаток r_n знакочередующегося ряда* (6.22), *удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине.*

Пример 6.9. Вычислить с точностью до 0,1 сумму сходящегося ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots. \tag{6.30}$$

В качестве приближенного значения S ряда (6.30) мы должны взять ту частичную сумму S_n, для которой $|r_n|<0,1$. Согласно следствию из теоремы Лейбница $|r_n|<\frac{1}{n+1}$. Следовательно, достаточно положить $n+1=10$, т.е. $n=9$. Тогда

$$S_9=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\approx 0,74.$$

Отсюда $S\approx 0,7$ с точностью до 0,1.

5. Абсолютная и условная сходимости. Перейдем теперь к рядам с членами, имеющими любой знак. С каждым таким рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{6.31}$$

связан ряд с неотрицательными членами, составленный из модулей членов данного ряда, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|. \tag{6.32}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6.9. *Если сходится ряд* (6.32), *то сходится и ряд* (6.31).

Доказательство. Составим два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n \qquad (p)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}q_n \qquad (q),$$

где

$$p_n=\begin{cases}a_n, \text{ если } a_n>0,\\ 0, \text{ если } a_n\le 0,\end{cases} \qquad q_n=\begin{cases}0, \text{ если } a_n\ge 0,\\ |a_n|, \text{ если } a_n<0.\end{cases}$$

Так как при $n = 1, 2, \ldots$ $p_n \leq |a_n|$ и $q_n \leq |a_n|$, то по теореме 6.7 ряды (p) и (q) сходятся. Обозначим их суммы соответственно через P и Q. Частичную сумму S_n данного ряда (6.31) можно с помощью обозначений для p_n и q_n переписать в виде

$$S_n = (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) - (q_1 + q_2 + \ldots + q_n).$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = P - Q. \tag{6.33}$$

Следовательно, ряд (6.31) сходится.

Определение. Ряд (6.31) называют *абсолютно сходящимся*, если ряд (6.32) сходится. Если же ряд (6.31) сходится, а ряд (6.32) расходится, то ряд (6.31) называют *неабсолютно сходящимся*, или *условно сходящимся*.

Примечание. Равенство (6.33) показывает, что сумма абсолютно сходящегося ряда равна разности сумм двух положительных рядов, составленных из всех его положительных членов и из абсолютных величин всех его отрицательных членов.

Пример 6.10. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

абсолютно сходится, так как сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(см. пример 6.4); ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{6.34}$$

по теореме Лейбница сходится, но ряд расходится как гармонический. Следовательно, ряд (6.34) сходится условно.

6.2. Степенные ряды

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, каждый член которого является функцией от x. Такие ряды называются ***функциональными***. Ограничимся рассмотрением двух наиболее употребительных видов функциональных рядов — *степенных* и *тригонометрических*.

1. Интервал сходимости. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \tag{6.35}$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — постоянные вещественные числа, называется *степенным рядом*.

Иногда рассматривают степенной ряд более общего вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{6.36}$$

где x_0 — некоторое постоянное число.

Ряд (6.36) легко приводится к виду (6.35), если положить

$$x - x_0 = y.$$

Поэтому в дальнейшем почти исключительно будем заниматься степенными рядами вида (6.35).

При каждом конкретном значении x ряд (6.35) становится числовым, который в зависимости от x сходится или расходится.

Очевидно, всякий степенной ряд (6.35) сходится при $x = 0$. Существуют степенные ряды вида (6.35), сходящиеся лишь при $x = 0$ (ряды I класса, см. ниже пример 6.12), а также степенные ряды вида (6.35), сходящиеся на всей числовой прямой (ряды II класса, см. ниже пример 6.13). Остальные степенные ряды вида (6.35) относят к рядам III класса.

В подробных курсах математического анализа [6] доказывается, что для *каждого степенного ряда* (6.35) III *класса существует положительное число* R, *такое, что этот ряд абсолютно сходится при* $|x| < R$ *и расходится при* $|x| > R$.

Это число R называется *радиусом сходимости* рассматриваемого ряда, а интервал $(-R;\ R)$ называется *интервалом сходимости* этого ряда.

Примечания. 1. На концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = -R$ и $x = R$ степенной ряд (6.35) может быть как сходящимся, так и расходящимся. Это зависит от конкретного исследуемого ряда.

2. Для ряда I класса полагают $R = 0$, для ряда II класса полагают $R = +\infty$.

В простейших случаях радиус сходимости R степенного ряда (6.35) III класса может быть определен с помощью признака Даламбера. Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \quad 0\neq$$

Образовав ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|, \tag{6.37}$$

применим к нему признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L|x|.$$

В соответствии с этим признаком ряд (6.35) сходится, если $L|x| < 1$, т.е. если $|x| < \frac{1}{L}$, и расходится, если $L|x| > 1$, т.е. если $|x| > \frac{1}{L}$ (в этом случае согласно примечанию 3 из п. 3 в подразд. 6.1 общий член ряда (6.37), а значит, и ряда (6.35) не стремится к нулю при $n \to \infty$). Следовательно, ряд (6.35) сходится абсолютно при $|x| < \frac{1}{L}$ и расходится при $|x| > \frac{1}{L}$, т.е. $R = \frac{1}{L} \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Примечание. Если $L = 0$, то при любом x из числовой оси $L|x| = 0 < 1$ и ряд (6.37), а значит, и ряд (6.35) сходятся на всей числовой оси, т.е. $R = +\infty$. Если же $L = +\infty$, то при любом $x \neq 0$ из числовой оси $L|x| = +\infty$ и, значит, в силу примечания 4 из п. 3 в подразд. 6.1 ряд (6.35) при любом $x \neq 0$ расходится, т.е. $R = 0$.

Пример 6.11. Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n \tag{6.38}$$

$L = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \frac{1}{3}$. Следовательно, $R = 3$. Поэтому данный ряд абсолютно сходится в интервале $(-3; 3)$ и расходится вне отрезка $[-3; 3]$. В точке $x = 3$ получаем гармонический ряд, т.е. в этой точке ряд (6.38) расходится, о точке $x = -3$ имеем ряд $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots$, который сходится в силу теоремы Лейбница (подразд. 6.1, п. 4). Значит, в точке $x = -3$ ряд (6.38) сходится условно.

Пример 6.12. В случае ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^n$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) \quad .$$

Значит, $R = 0$.

Пример 6.13. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Следовательно, $R = \infty$.

2. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Сумма сходящегося степенного ряда

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{6.39}$$

представляет собой функцию от x, определенную в интервале сходимости $(-R; R)$ $(R > 0)$ этого ряда.

В более полных курсах (см., например, [6]) доказывается, что *функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(-R; R)$ и ее производ-*

ная $f'(x)$ может быть найдена почленным дифференцированием ряда (6.39), т.е.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots .$$

Аналогично могут быть вычислены и производные старших по рядков. При этом получаемые здесь ряды имеют тот же интервал сходимости, что и ряд (6.39).

Доказывается также ([6]), что *для всякого x из интервала* $(-R; R)$ *ряд* (6.39) *можно почленно интегрировать на отрезке* $[0; x]$, т.е.

$$\int_0^x f(t)dt = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \ldots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + \ldots .$$

Последний ряд имеет тот же интервал сходимости, что и ряд (6.39).

3. Разложение функций в степенные ряды. Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ *разлагать в степенной ряд*, т.е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда, так как тем самым мы получаем возможность просто вычислять значения этой функции с любой степенью точности.

Разберем частные случаи.

Рассмотрим степенной ряд

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots .$$

Этот ряд (см. пример 6.1) сходится при $|x| < 1$, причем сумма его равна $\frac{1}{1-x}$.

Следовательно,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (6.40)$$

и это равенство справедливо при всех x из $(-1; 1)$.

Формула (6.40) называется *разложением функции* $\frac{1}{1-x}$ в *степенной ряд*.

Формула (6.40) является источником новых разложений.

Разложение функции $\ln(1 + x)$. Заменяя в разложении (6.40) x на $-t$, получим

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots . \qquad (6.41)$$

Считая $|x| < 1$, можно ряд (6.41) проинтегрировать по t в пределах от 0 до x. Получим:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2 dt - \int_0^x t^3 dt + \ldots + (-1)^n \int_0^x t^n dt + \ldots .$$

Отсюда

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots, \tag{6.42}$$

если $|x| < 1$. Можно показать, что это разложение справедливо также при $x = 1$.

Р а з л о ж е н и е ф у н к ц и и $\operatorname{arctg} x$. Аналогично, полагая в (6.40) $x = -t^2$ и интегрируя полученное равенство по t от 0 до x, получим разложение функции $\operatorname{arctg} x$:

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots, \tag{6.43}$$

справедливое для $|x| < 1$. Можно доказать, что это разложение остается верным и при $x = 1$, и при $x = -1$.

Т е о р е м а е д и н с т в е н н о с т и. *Если функция $f(x)$ на интервале $(x_0 - R;\ x_0 + R)$ разлагается в степенной ряд*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \tag{6.44}$$

то это разложение единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно результатам[1] п. 2

$$f'(x) = 1\cdot a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots,$$

$$f''(x) = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x - x_0) + \ldots + n(n - 1)a_n + (x - x_0)^{n-1} + \ldots,$$

$$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x - x_0) + \ldots + (n - 2)(n - 1)na_n(x - x_0)^{n-3} + \ldots,$$

$\ldots,$

$$f^n(x) = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots (n-1)na_n + 2\cdot 3 \ldots n(n + 1)a_{n+1}(x - x_0) + \ldots,$$

$\ldots .$

Полагая в этих равенствах и в равенстве (6.44) $x = x_0$, найдем, что

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = f(x_0),$$
$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots . \tag{6.45}$$

Подставляя полученные выражения коэффициентов в равенство (6.44), получим ряд

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

который называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$.

Таким образом, ***если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд по степеням $x - x_0$, то этот ряд обязательно является рядом Тейлора этой функции***.

---

[1] Они, как и другие результаты этого подраздела, распространяются и на ряды вида (6.36) в силу подставки $x - x_0 = y$.

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим частный случай ряда Тейлора, который называется *рядом Маклорена*:

$$f(x) = f(0) = \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \ldots .$$

Отсюда следует, что ряды (6.40), (6.42), (6.43) представляют собой соответственно ряды Маклорена функций $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1 - x)$, и $\mathrm{arctg}\,x$; чтобы в этом убедиться, достаточно вычислить коэффициенты указанных рядов по формулам (6.45) (предоставляем это сделать самостоятельно).

Разложение функции e^x. Пусть $f(x) = e^x$. Имеем $f^{(n)}(x) = e^x$, $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда $f^{(n)}(0) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Значит, функция e^x имеет следующий ряд Маклорена:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Ранее (см. пример 6.13) установлено, что этот ряд сходится на всей числовой оси. В подробных курсах [6] доказывается, что сумма этого ряда для любого значения x равна e^x, т.е.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots . \tag{6.46}$$

Разложение функции $\sin x$. Пусть $f(x) = \sin x$. Здесь $f^{(k)}(x) = \sin\left(x \quad \frac{k\pi}{2}\right)$, откуда $f^{(k)}(0) = \sin\frac{k\pi}{2} \quad 0$ при $k = 2n$ и $f^{(k)}(0) =$ $= (-1)^n$ при $k = 2n + 1$. Поэтому функция $\sin x$. имеет следующий ряд Маклорена:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Последний ряд, как и ряд (6.46), также сходится при любом x, и его сумма равна $\sin x$, т.е.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(\quad 1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!}. \tag{6.47}$$

Разложение функции $\cos x$. Продифференцировав почленно ряд (6.47), получим:

$$\cos x = 1 \quad \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots,$$

при этом это разложение также справедливо для любого x.

Разложение функции $(1 + x)^\alpha$. Пусть $f(x) = (1 + x)^\alpha$, где α — любое вещественное число. Здесь

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha-n}$$

и

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)...(\alpha - n + 1).$$

Можно доказать (см., например, [6]), что равенство

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (6.48)$$

верно при $|x| < 1$.

Ряд (6.48) называется *биномиальным*.

Если $\alpha = m$ (m — натуральное), то имеем так называемый бином Ньютона:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)n}x^n.$$

4. Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям. Степенные ряды являются мощным вычислительным средством. С их помощью можно, например, вычислять приближенные значения функций, приближенно вычислять некоторые «неберущиеся» определенные интегралы.

Пример 6.14. Вычислим значение $e^{0,2}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Согласно формуле (6.46) имеем

$$e^{0,2} = 1 + 0,2 + \frac{0,2^2}{2!} + \frac{0,2^3}{3!} + \frac{0,2^4}{4!} + \ldots .$$

Оценим погрешность, получаемую при отбрасывании всех членов этого ряда, начиная с пятого:

$$r_4 = \frac{0,2^4}{4!} + \frac{0,2^5}{5!} + \frac{0,2^6}{6!} + \ldots = \frac{0,2^4}{4!}\left(1 + \frac{0,2}{5} + \frac{0,2^2}{5\cdot 6} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{0,2^4}{4!}\left(1 + \frac{0,2}{5} + \left(\frac{0,2}{5}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{0,0016}{24}\cdot\frac{1}{1-\frac{0,2}{5}} < 0,0001.$$

Значит, с точностью до 0,0001 имеем

$$e^{0,2} \approx 1 + 0,2 + \frac{0,2^2}{2!} + \frac{0,2^3}{3!} = 1,2 + \frac{0,04}{2} + \frac{0,008}{6} \approx 1,2213$$

(здесь можно использовать калькулятор).

Пример 6.15. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,0001. Заменяя x на $-x^2$ в формуле (6.46), получаем

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots .$$

Подставим этот ряд под знак данного интеграла и произведем почленное интегрирование. Получаем

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} dx \quad \int\limits_0^{\frac{1}{4}} x^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{4}} x^4 dx - \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{1}{4}} x^6 dx + \ldots =$$

$$= 0{,}25 - \frac{1}{3\cdot 4^3} + \frac{1}{10\cdot 4^5} - \frac{1}{42\cdot 4^7} + \ldots . \qquad (6.49)$$

Это знакочередующийся ряд, удовлетворяющий теореме Лейбница (см. подразд. 6.1, п. 4). Так как

$$\frac{1}{10\cdot 4^5} = \frac{1}{10\,240} \quad \frac{1}{10\,000} <= 0{,}0001,$$

то для получения нужной точности достаточно взять первые два члена ряда (6.49):

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx 0{,}25 - \frac{1}{3\cdot 4^3} \approx 0{,}25 - 0{,}0052 = 0{,}2448$$

(здесь также можно использовать калькулятор).

Выполните задания

Найдите сумму рядов:

1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$. **2.** $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$. **3.** $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots$.

4. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots$. **5.** $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots$.

Исследуйте сходимость рядов:

6. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(1+n)^n}$. **9.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$. **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$. **15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\alpha}{3^n},\ 0<\alpha<3\pi$. **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$. **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$. **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. **22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

Исследуйте ряды на абсолютную и условную сходимость:

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$. **24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{2^n}$. **25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}$. **26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{100n+1}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n+1)^2}{n^2+1}$. **28.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$.

Найдите область сходимости рядов:

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. **30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3x^n}{n+1}$. **31.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{e^n}$. **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 7^n}$. **33.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$.

Разложите в ряд по степеням x следующие функции:

34. e^{-x^2}. **35.** x^2e^{-2x}. **36.** $\sin x^2$. **37.** $\cos^2 x$. **38.** $\frac{1}{1-x^2}$. **39.** $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

40. $\frac{1}{(1-x)^2}$. **41.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **42.** $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

Пользуясь соответствующими разложениями, вычислите с точностью до 0,001:

43. $\sqrt{e}$. **44.** $\sin 18°$. **45.** $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$.

Глава 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

В различных областях науки и техники весьма часто встречаются задачи, для решения которых требуется решить одно или несколько уравнений, содержащих производные искомых функций. Такие уравнения называют *дифференциальными*. Рассмотрим несколько задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Задача 1. На плоскости xOy найти кривую, проходящую через точку $O(0;\ 0)$, у которой угловой коэффициент касательной, проведенной к любой точке кривой, равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение. Пусть $y = f(x)$ — уравнение искомой кривой. По условию задачи в каждой точке $M(x; f(x))$ есть касательная к этой кривой, угловой коэффициент которой, т.е. $f'(x)$, равняется $2x$. Таким образом, имеем

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \tag{7.1}$$

Это — дифференциальное уравнение, так как оно содержит производную искомой функции. Из уравнения (7.1) следует, что функция y есть первообразная функции $2x$. Следовательно,

$$y = \int 2x dx$$

или

$$y = x^2 + C, \tag{7.2}$$

где C — произвольная постоянная.

Из формулы (7.2) следует, что дифференциальное уравнение (7.1) имеет бесконечное множество решений, т.е. уравнению (7.1) удовлетворяет не одна кривая, а бесконечное множество кривых — парабол (рис. 7.1). Чтобы из этого множества кривых выбрать нужную нам кривую, надо воспользоваться тем, что искомая кривая проходит через точку $O(0;\ 0)$. Следовательно, координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (7.2). Поэтому $0 = 0 + C$, т.е. $C = 0$. Значит, искомая кривая будет $y = x^2$.

Задача 2. Найти закон движения свободно падающего в пустоте тела, если пройденный путь начинает отсчитываться от момента времени $t = 0$ и начальная скорость падения равна нулю. Скорость в этом случае выражается, как известно, формулой $v = gt$.

Решение. Как уже отмечалось (см. подразд. 3.1, п. 2), скорость прямолинейного движения есть производная пути по времени. Поэтому

$$v = \frac{ds}{dt} = gt. \tag{7.3}$$

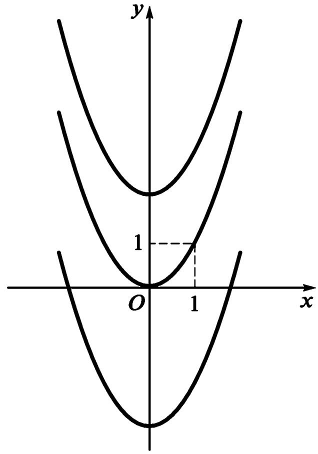


Рис. 7.1

Из этого уравнения следует, что функция s есть первообразная функции gt. Следовательно,

$$s = \int gt dt$$

или

$$s = \frac{gt^2}{2} + C. \tag{7.4}$$

Для определения произвольной постоянной C используем то условие, что начало отсчета пути совпадает с началом отсчета времени, т.е. при $t = 0$ $s = 0$. Подставляя эти значения в равенство (7.4), находим $0 = 0 + C$, т.е. $C = 0$, и, следовательно, окончательно получаем

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

В рассмотренных двух задачах мы приходим к дифференциальному уравнению вида $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)$. Это уравнение является простейшим дифференциальным уравнением. Однако в большинстве случаев естественные и технические процессы описываются гораздо общими и сложными дифференциальными уравнениями.

Дифференциальным уравнением называют соотношение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные. Если искомая функция есть функция одного независимого переменного, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. Мы будем заниматься в этой главе, только такими уравнениями. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называют *порядком* данного уравнения.

Следовательно, общий вид дифференциального уравнения n-го порядка следующий:

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0, \qquad (7.5)$$

причем в частных случаях в это уравнение могут и не входить x, y и отдельные производные порядка ниже, чем n. Например, уравнения $y'-\dfrac{y}{x}=x, y''+y'=1$ имеют соответственно первый и второй порядок.

Всякая функция $y=f(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение (7.5), обращает его в тождество, называется *решением* этого уравнения.

Пример 7.1. Функция $y=e^{\frac{x^3}{3}}$ является решением уравнения $y'-x^2y=0$, так как она обращает это уравнение в тождество.

7.2. Дифференциальные уравнения первого порядка, их частные случаи. Приложения в естествознании

1. Дифференциальное уравнение первого порядка, его общее решение и начальные условия. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет общий вид

$$F(x,y,y')=0,$$

или (если это уравнение можно разрешить относительно y') вид

$$y'=f(x,y). \qquad (7.6)$$

Будем рассматривать в уравнении (7.6) переменные x и y как декартовы прямоугольные координаты точки на плоскости xOy. Пусть $y=\varphi(x)$ — решение уравнения (7.6); тогда кривая, определяемая уравнением $y=\varphi(x)$, называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (7.6). Рассмотрим на интегральной кривой произвольную точку $M(x, y)$. Согласно геометрическому смыслу производной в этой точке имеем

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha,$$

где α — угол, образуемый касательной к этой кривой в точке M с осью Ox.

Из последнего равенства и из (7.6) получаем

$$\operatorname{tg}\alpha=f(x,y),$$

где x, y — координаты точки M.

Таким образом, угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в каждой ее точке равен значению в этой точке правой части уравнения (7.6). Итак, уравнение (7.6) определяет в каждой точке интегральной кривой направление касательной к этой кривой.

Каждой точке $M(x, y)$ той области, где определена функция $f(x, y)$ (правая часть уравнения (7.6)), сопоставим отрезок с угловым коэффициентом $k = f(x, y)$, где (x, y) — координаты точки M. Мы получаем совокупность направлений, или, как говорят, поле направлений данного дифференциального уравнения.

Таким образом, уравнению (7.6) соответствует его поле направлений. В этом состоит геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка (7.6). Проведя указанные выше отрезки для достаточно большого числа точек области, получим наглядное изображение поля направлений. Так как касательная в точке интегральной кривой имеет то же направление, что и отрезок в этой точке, то задачу решения (интегрирования) уравнения (7.6) геометрически можно истолковать следующим образом: найти такую кривую, чтобы ее касательная в каждой точке имела направление, совпадающее с направлением поля в этой точке.

Приведенные рассуждения хорошо иллюстрировать на известном опыте с железными опилками, помещенными в магнитное поле. Сами опилки образуют поле направлений, а интегральной кривой служит одна из магнитных силовых линий.

В задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям, точнее в их решения (см. (7.2) и (7.4)), входит произвольная постоянная C. Такие решения называют общими решениями этих уравнений. Аналогично решение уравнения (7.6), содержащее произвольную постоянную C, т.е. имеющее вид

$$y = \varphi(x, C), \tag{7.7}$$

называют ***общим решением*** этого уравнения. Иногда, впрочем, это решение получается в неявной форме $\Phi(x, y, C) = 0$ или $\psi(x, y) = C$. В этом случае соотношение $\Phi\ (x, y, C) = 0$ или $\psi(x, y) = C$ называют ***общим интегралом*** уравнения (7.6).

Решить или ***проинтегрировать*** данное дифференциальное уравнение — значит найти его общее решение в той или иной форме.

Решение, которое получается из общего решения при некотором фиксированном значении произвольной постоянной C, называют ***частным решением***. Например, функции $y = x^2$, $s = \frac{gt^2}{2}$ — частные решения соответственно уравнений (7.1), (7.3).

Для уравнения (7.6) справедлива следующая теорема, называемая теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (7.6).

Теорема 7.1.[1] *Если в уравнении* (7.6) *функция* $f(x, y)$ *и ее частная производная* $f'_y(x, y)$ *непрерывны в некоторой области* D *на плоскости* xOy, *содержащей некоторую точку* (x_0, y_0), *то существует единственное решение этого уравнения* $y = \varphi(x)$, *удовлетворяющее условию: при* $x = x_0$ $y = y_0$.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что существует, и притом единственная, функция $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку (x_0, y_0).

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0, называют *начальным условием*. Начальное условие дает возможность выделить из общего решения (7.7) частное решение. Действительно, из уравнения $y_0 = \varphi\ (x_0, C)$ определится конкретное значение $C = C_0$, и тогда искомое частное решение запишется в виде $y = \varphi(x, C_0) = \psi(x)$.

2. Уравнения с разделяющимися переменными. Запишем уравнение (7.6) в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \text{или} \quad dy = f(x,y)dx.$$

Такому уравнению можно придать следующую форму:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{7.8}$$

Форма (7.8) удобна тем, что здесь переменные x и y равноправны, т. е. каждую из них можно рассматривать как функцию другой. Предположим, что функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ можно представить произведениями

$$M(x,y) = M_1(x)M_2(y),$$
$$N(x,y) = N_1(x)N_2(y),$$

в которых сомножители зависят только от одной переменной. Тогда уравнение (7.8) перепишется в виде

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0, \tag{7.9}$$

откуда, деля почленно на произведение $M_2(y)N_1(x)$ (предполагаем, что оно не равно нулю), имеем

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0. \tag{7.10}$$

Заметим, что в уравнении (7.10) множитель перед dx — функция только одной переменной x, а множитель перед dy — функция только одной переменной y.

Уравнение (7.10) называют уравнением с *разделенными* переменными, а уравнение (7.9) — уравнением с *разделяющимися* пере-

[1] Доказательство этой теоремы выходит за рамки настоящей книги (читатель может найти его, например, в книге [11]).

менными. Итак, уравнение с разделяющимися переменными (7.9) сводится к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих частей уравнения (7.9) на произведение $M_2(y)N_1(x)$. Эта операция называется «разделением» переменных.

Покажем, что соотношение

$$F(x,y)=C, \tag{7.11}$$

где

$$F(x,y)=\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\frac{M_2(x)}{N_2(x)}dy,$$

есть общий интеграл уравнения (7.10) и уравнения (7.9). Действительно, пусть $y=\varphi(x,\ C)$ (или кратко $y=\varphi$) — функция, определяемая уравнением (7.11). Тогда имеем тождество

$$F(x,\varphi)\equiv C.$$

Дифференцируя это тождество по x, получаем тождество

$$F'_x(x,\varphi)+F'_y(x,\varphi)\varphi'\equiv 0$$

или

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy\equiv 0.$$

Следовательно, функция $y=\varphi(x,C)$ оказывается общим (поскольку зависит от C) решением уравнения (7.10), а следовательно, и уравнения (7.9). Значит, соотношение (7.11) или соотношение

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\frac{M_2(x)}{N_2(x)}dy=C$$

есть общий интеграл уравнения (7.10) и уравнения (7.9).

Примечание. В общем случае, деля на произведение $M_2(y)N_1(x)$, мы рискуем потерять те решения уравнения (7.9), которые обращают это произведение в нуль. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция $y=b$, где b — корень уравнения $M_2(y)=0$, есть решение уравнения (7.9). Аналогично, функция $x=a$, где a — корень уравнения $N_1(x)=0$, также является решением уравнения (7.9).

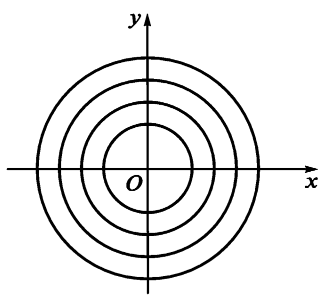


Рис. 7.2

Пример 7.2. Решить уравнение $xdx+ydy=0$. Интегрируя, находим $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C_1$. Так как левая часть последнего равенства неотрицательна, то и правая часть тоже неотрицательна. Обозначив $2C_1$ через C^2, будем иметь $x^2+y^2=C^2$. Это — уравнение семейства концентрических окружностей (рис. 7.2) с центром в начале координат и радиусом C.

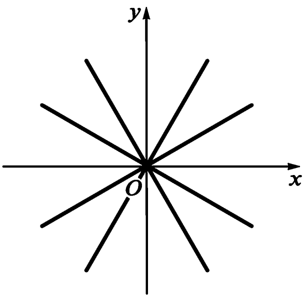


Рис. 7.3

Пример 7.3. Решить уравнение $x\,dy = y\,dx$. Разделяя переменные, получаем $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя последнее уравнение, будем иметь

$$\ln y = \ln x + \ln C.^{1} \qquad (7.12)$$

В (7.12) произвольная постоянная взята в логарифмической форме, что законно, так как всякое положительное или отрицательное число C_1 может быть представлено как логарифм другого числа: $C_1 = \ln C$, где $C = e^{C_1}$.

Потенцируя равенство (7.12), получаем общее решение данного дифференциального уравнения: $y = xC$ или $y = Cx$. Это — семейство прямых, проходящих через начало координат (рис. 7.3).

Пример 7.4. Найти частное решение уравнения $(1 + y^2)\,dx = xy\,dy$, если $y = 1$ при $x = 2$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dx}{x} = \frac{y}{1+y^2}dy,$$

$$\ln x = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \ln C,$$

что после потенцирования дает

$$x^2 = C^2(1+y^2).$$

Используя начальное условие, имеем

$$4 = 2C^2,$$

откуда $C^2 = 2$.

Итак, частным решением данного уравнения, соответствующим начальному условию $y = 1$ при $x = 2$, является функция $y = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1}$.

3. Радиоактивный распад. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличной массе. Найти закон распада радия, если известно, что в начальный момент $t = 0$ имелось m_0 г радия и период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы радия) равен 1 590 лет.

Р е ш е н и е. Пусть в момент времени t масса радия составляет x г. Тогда скорость распада радия равна:

$$\frac{d(m_0 - x)}{dt} = -\frac{dx}{dt}.$$

[1] Строго говоря, мы должны писать $\ln|y| = \ln|x| + \ln C$, где $C > 0$. Однако допущенная в (7.12) «вольность» не отразится на окончательном результате, если после потенцирования произвольную постоянную C считать действительным числом. Это следует иметь в виду и для дальнейшего.

По условию задачи

$$-\frac{dx}{dt} = kx, \tag{7.13}$$

где k — коэффициент пропорциональности. Разделяя в уравнении (7.13) переменные и затем интегрируя, получаем:

$$\frac{dx}{x} = \quad kdt, \quad \ln x \quad + kt \quad \ln C,$$

что после потенцирования дает:

$$x = Ce^{-kt}.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t = 0$ $x = m_0$. Имеем: $C = m_0$ и, значит,

$$x = m_0 e^{-kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: при $t = 1\,590$ $x = \frac{m_0}{2}$. Имеем:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-1\,590k} \text{ или } e^{1\,590k} = 2$$

и, следовательно, $e^k = 2^{1/1\,590}$. Поэтому искомая функция

$$x = m_0 2^{-t/1\,590}.$$

4. Скорости размножения бактерий. Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент $t = 0$ имелось 100 бактерий, а в течение 3 ч их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 ч?

Решение. Пусть x — количество бактерий, имеющихся в данный момент. Тогда согласно условию дифференциальное уравнение задачи:

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Как и при решении уравнения (7.13) в предыдущей задаче, находим:

$$x = Ce^{kt}.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t = 0$ $x = 100$. Имеем: $C = 100$, и, значит,

$$x = 100e^{kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: при $t = 3$ $x = 200$.

Имеем:

$$200 = 100e^{3t} \text{ или } 2 = e^{3k},$$

и, следовательно, $e^k = 2^{1/3}$. Поэтому искомая функция

$$x = 100 \cdot 2^{t/3},$$

откуда при $t = 9$ $x = 800$. Следовательно, в течение 9 ч количество бактерий увеличится в 8 раз.

5. Непрерывный рост населения или его убывание. Пусть скорость прироста (или убывания) некоторой величины зависит от ее наличного количества A в данный момент t. В начальный момент $t = 0$ эта величина равна A_0. Найти зависимость величины A от времени t.

Для построения математической модели простейшего типа роста населения принимаем, что скорость изменения количества населения прямо пропорциональна этому количеству. Скорость прироста населения выражается производной A'. Если $k > 0$ — коэффициент пропорциональности, то в случае прироста населения

$$A' = kA \tag{7.14}$$

и в случае его убывания

$$A' = -kA. \tag{7.15}$$

Уравнение (7.14) имеет вид уравнения $\frac{dx}{dt} = kx$ с начальным условием $A = A_0$ при $t = 0$. Следовательно, $A = A_0e^{kt}$.

Уравнение же (7.15) имеет вид уравнения (7.13) с начальным условием $A = A_0$ при $t = 0$ и, значит, согласно формуле (7.8) $A = A_0e^{-kt}$.

Итак, в случае роста населения естественный прирост

$$A = A_0e^{kt} \tag{7.16}$$

и в случае его убывания (естественная смертность)

$$A = A_0e^{-kt}. \tag{7.17}$$

Схематически это представлено на рис. 7.4.

Рис. 7.4

6. Текучесть рабочей силы. Задача. Пусть в начальный момент $t = 0$ число рабочих на заводе равно A_0. На основе изучения данных статистики установлено, что скорость уменьшения числа рабочих со временем t прямо пропорциональна их числу. Известно также, что численность рабочих на заводе за год уменьшилась в 2 раза. Найти зависимость числа рабочих A от времени. Через сколько лет число рабочих уменьшится в 8 раз?

Решение. Согласно условию задачи имеем уравнение

$$A' = -kA$$

($k > 0$ — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом текучести), т.е. уравнение (7.15) с начальным условием $A = A_0$ при $t = 0$.

Поэтому (см. формулу (7.17))

$$A = A_0 e^{-kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: $A = \dfrac{A_0}{2}$ при $t = 1$. Имеем

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-k} \text{ или } e^k = 2.$$

Поэтому искомая функция

$$A = A_0 2^{-t},$$

откуда, полагая $A = \dfrac{A_0}{8}$, имеем

$$\frac{A_0}{8} = A_0 2^{-t} \text{ или } 2^{-3} = 2^{-t}$$

и, значит, $t = 3$, т.е. через три года число рабочих на заводе уменьшится в 8 раз.

7. Однородные уравнения. Функция $f(x, y)$ называется *однородной степени m*, если имеет место тождество

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Пример 7.5. Функция $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ является однородной функцией степени 2, так как

$$(tx)^2 + 2(ty)^2 - (txty) = t^2(x^2 + 2y^2 - xy).$$

С понятием однородной функции связано понятие однородного дифференциального уравнения. Уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (7.18)$$

называется *однородным дифференциальным уравнением первого порядка*, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями одной и той же степени.

Можно показать, что с помощью подстановки $y = ux$, где u — новая искомая функция от x, однородное уравнение (7.18) легко приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Заметим, что

$$dy = udx + xdu.$$

Иногда целесообразно вместо подстановки $y = ux$ использовать подстановку $x = uy$.

Пример 7.6. Решим уравнение $(y^2 - 3x^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$, если $y = 0$ при $x = 0$.

Решение. Применяя подстановку $y = ux$, имеем

$$(u^2x^2 - 3x^2)dx + 2x^2u(udx + xdu) = 0,$$

откуда

$$3(u^2 - 1)dx + 2xudu = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{3dx}{x} + \frac{2udu}{u^2 - 1} = 0,\ 3\ln x \quad \ln(u^2 \quad 1) \quad \ln C,$$

что после потенцирования дает $x^3(u^2 - 1) = C$. Так как $u = \dfrac{y}{x}$, то $x^3\left(\dfrac{y^2}{x^2} - 1\right) = C$ и общий интеграл $x\,(y^2 - x^2) = C$. Используя начальное условие, имеем $C = 0$. Поэтому искомыми частными решениями являются $y = \pm x$.

8. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение

$$y' + py = q, \tag{7.19}$$

где $p = p(x)$ и $q = q(x)$ — заданные непрерывные в интервале $(a;\ b)$ функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Для решения уравнения (7.19) применим подстановку $y = uv$, причем функцию $u = u(x)$ будем считать новой неизвестной функцией, а функцию $v = v(x)$ выбирем произвольно. Эта подстановка дает $u'v + uv' + puv = q$ или $v\dfrac{du}{dx} + \left(\dfrac{dv}{dx} + pv\right)u = q$. Используя произвольный выбор функции v, подчиним ее условию $\dfrac{dv}{dx} + pv = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$-\ \ \frac{dv}{v} = \quad pdx,\ \ln v \qquad \int pdx,$$

откуда

$$v = \mathrm{e}^{-\int pdx}.$$

Поэтому имеем уравнение

$$\mathrm{e}^{-\int pdx}\frac{du}{dx} = q.$$

Решая его, получаем

$$u = \int q\mathrm{e}^{\int pdx}dx + C.$$

Возвращаясь к переменной y, находим общее решение уравнения (7.19):

$$y = \mathrm{e}^{-\int pdx}[\int q\mathrm{e}^{\int pdx}dx + C]. \tag{7.20}$$

Примечание. Если в уравнении (7.20) $q(x) = 0$, то оно называется линейным однородным уравнением первого порядка, в противном случае — линейным неоднородным уравнением первого порядка. Следовательно, линейное однородное уравнение первого порядка имеет вид

$$y' + py = 0. \tag{7.21}$$

Из формулы (7.20) следует формула общего решения уравнения (7.21):

$$y = Ce^{-\int p dx}.$$

Пример 7.7. Решим уравнение

$$y' - \frac{y}{x} = x.$$

Решение. Согласно формуле (7.20) имеем

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(C + \int x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx\right) = e^{\ln x}\left(C + \int x e^{-\ln x} dx\right) = x\left(C + \int dx\right) = Cx + x^2.$$

Пример 7.8. (Модель сезонного роста). Дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dx}{st} = rx(t)$, где r — положительная постоянная, можно рассматривать как простую модель сезонного роста. Скорость роста $\frac{dx}{dt}$ популяции $x(t)$ становится попеременно то положительной, то отрицательной, и популяция то возрастает, то убывает. Это может вызываться такими сезонными факторами, как доступность пищи. Переписав данное уравнение в виде

$$\frac{dx}{dt} - (r\cos t)x = 0,$$

согласно (7.20) имеем:

$$x = Ce^{\int r\cos t dt} = Ce^{r\sin t}.$$

Полагая $t = 0$, получим $C = x(0)$, т.е. размер популяции в момент t есть $x = x(0)e^{r\sin t}$. Максимальный размер популяции, равный $e^r x(0)$, достигается при $t = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$, когда $\sin t = 1$. Минимальный размер, равный $e^{-r}x(0)$, достигается при $t = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$, когда $\sin t = -1$.

В этой модели размер популяции колеблется от $e^r x(0)$ до $e^{-r}x(0)$ с периодом 2π. Моменты времени $t = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ можно считать серединами сезонов наибольшей доступности пищи (летних сезонов), а моменты $t = \pi, 3\pi, \ldots$ соответствуют серединам сезонов наибольшей нехватки пищи (зимних сезонов). Продолжительность одного года соответствует 2π ед. времени. Это показано на рис. 7.5.

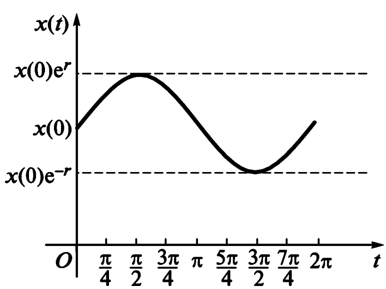


Рис. 7.5

Пример 7.9. (Внутреннее питание глюкозой). Вливание глюкозы в кровеносную систему является важной лечебной процедурой. Для изучения этого процесса определим $\tau = \tau(t)$ как количество глюкозы в крови пациента в момент времени t. Допустим, что глюкоза вводится в кровь с постоянной скоростью c (г/мин). В то же время глюкоза разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству глюкозы.

Пусть c_1 — скорость удаления глюкозы из кровеносной системы и $\tau(0)$ — начальное количество глюкозы в крови пациента. Имеем $\frac{d\tau(t)}{dt} = c - c_1$. Но в силу условия задачи $c_1 = k\tau(t)$, где k — положительная постоянная. Таким образом, $\frac{d\tau(t)}{dt} = c - k\tau(t)$, или, что то же,

$$\frac{d\tau}{dt} + kt = c.$$

Это — неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Согласно формуле (7.20) имеем:

$$\tau = e^{-\int k dt}\left(C + \int c e^{\int k dt} dt\right) = e^{-kt}\left(C + c\int e^{kt} dt\right) = e^{-kt}\left(C + \frac{c}{k}e^{kt}\right) = Ce^{-kt} + \frac{c}{k}.$$

Постоянную C можно выразить через начальное количество глюкозы в крови $\tau(0)$. Имеем $\tau(0) = C + \frac{c}{k}$. Значит, общее решение может быть записано в виде

$$\tau(t) = \frac{c}{k} + \left[\tau(0) - \frac{c}{k}\right] e^{-kt}.$$

С увеличением времени величина $\tau(t)$ приближается к пределу, равному $\frac{c}{k}$. Это и есть равновесное количество глюкозы в крови.

7.3. Уравнения высших порядков

1. Основные понятия. Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка есть

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \qquad (7.22)$$

Здесь $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ может не зависеть от некоторых из величин x, y, y', ... Однако если (7.22) есть уравнение именно n-го порядка, то от $y^{(n)}$ функция F обязательно зависит. Наиболее простым дифференциальное уравнение (7.22) оказывается тогда, когда оно имеет вид

$$y^{(n)} = f(x), \qquad (7.23)$$

где $f(x)$ — заданная функция.

Примером такого простейшего уравнения служит хотя бы дифференциальное уравнение

$$y'' = \frac{1}{x^2}. \qquad (7.24)$$

Из этого уравнения сразу видно, что

$$y' = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C_1, \tag{7.25}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

В свою очередь из уравнения (7.25) следует, что

$$y = \int\left(-\frac{1}{x} + C_1\right)dx + C_2 = -\ln|x| + C_1 x + C_2,$$

где C_2 — произвольная постоянная, никак не связанная с постоянной C_1.

Найденное решение зависит от *двух* произвольных постоянных, при этом исходное дифференциальное уравнение (7.24) было уравнением *второго* порядка. Такое решение называется *общим решением* этого уравнения.

Аналогично посредством n последовательных интегрирований решается любое уравнение вида (7.23). В связи с этим вводится определение.

Определение. *Общим решением* дифференциального уравнения n-го порядка (7.22) называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

существенно зависящая от n произвольных постоянных и обращающая уравнение (7.22) в тождество при любых значениях этих постоянных. Решения, получаемые из общего при закреплении постоянных C_1, C_2, ... , C_n, называют *частными*.

Замечание. В данном определении употреблено выражение «существенно зависящая». Это означает, что число постоянных нельзя снизить за счет введения новых обозначений. Например, функция

$$y = (C_1^2 + 2C_2 + C_3)x + C_4 + 6C_5$$

существенно зависит лишь от двух постоянных C_1^* и C_2^*

$$C_1^* = C_1^2 + 2C_2 + C_3 \quad \text{и} \quad C_2^* = C_4 + 6C_5$$

и может быть записана в виде

$$y = C_1^* x + C_2^*.$$

В прикладных вопросах часто приходится искать такое решение дифференциального уравнения n-го порядка, которое удовлетворяет n условиям: при заданном значении $x = x_0$ сама функция y и ее первые $n - 1$ производных y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ должны принимать заданные значения

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{7.26}$$

Вообще говоря, условия (7.26), называемые *начальными*, выделяют из общего решения

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

единственное частное решение.

2. Случаи понижения порядка. Рассмотрим три типа дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка.

I. Уравнение вида (7.23). Общее решение этого уравнения мы получим, произведя последовательно n интегрирований; при каждом таком интегрировании будет появляться новая произвольная постоянная.

II. Уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, ..., y^{(n-1)}) \quad (k \le n-1), \tag{7.27}$$

не содержащее явно y и младших производных до порядка $k-1$ включительно, допускает понижение порядка на k единиц. Для этого введем новую искомую функцию $z = y^{(k)}$. Тогда

$$y^{(k+1)} = z', \ ..., \ y^{(n)} = z^{(n-k)}$$

и уравнение относительно z будет порядка $n-k$:

$$z^{(n-k)} = f(x, z, z', ..., z^{(n-k-1)}).$$

Если найдено общее решение этого уравнения

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}),$$

то для y имеем уравнение

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Интегрируя его, найдем общее решение уравнения (7.27).

III. Уравнение

$$y^{(n)} = f(y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

не содержащее явно независимой переменной. Здесь порядок уравнения понижается на единицу путем замены обеих переменных. В качестве новой искомой функции мы выбираем $y' = p$, а за новую независимую переменную принимаем y.

7.4. Линейные уравнения второго порядка

1. Общие сведения о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{7.28}$$

где $p = p(x)$, $q = q(x)$ и $f(x)$ — непрерывные функции в интервале $(a; b)$, называется *неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка*, функции p, q — его *коэффициентами.*

Если $f(x) \equiv 0$ в этом интервале, то уравнение принимает вид

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (7.29)$$

и называется *однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка.* Если уравнение (7.29) имеет те же коэффициенты, что и (7.28), то оно называется *однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению* (7.28).

Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$, определенные и непрерывные в интервале $(a;\ b)$, называются *линейно зависимыми* в этом интервале, если существуют постоянные числа α_1 и α_2 (причем, по крайней мере, одно из них не равно нулю), такие, что для всех значений x в рассматриваемом интервале выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0. \qquad (7.30)$$

Функции y_1 и y_2 называют *линейно независимыми* в интервале $(a;\ b)$, если тождество (7.30) может иметь место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Теорема 7.2. *Если y_1 и y_2 — линейно независимые частные решения линейного однородного уравнения второго порядка* (7.29), *то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \qquad (7.31)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Доказательство. Так как y_1 и y_2 — решения уравнения (7.29), то имеем тождества $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0, y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$. Используя их, получаем тождество

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) =$$
$$= C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = 0.$$

Следовательно, выражение (7.31) является решением уравнения (7.29), и поскольку это решение содержит две произвольные постоянные, то оно является общим решением однородного уравнения (7.29).

Теорема доказана.

Пусть y_1 и y_2 — два линейно зависимых решения уравнения (7.29). Тогда выполняется тождество (7.30), где либо $\alpha_1 \neq 0$, либо $\alpha_2 \neq 0$. Предположим для определенности, что $\alpha_2 \neq 0$. Тогда из тождества (7.30) имеем $y_2 = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} y_1$, или $y_2 = ay_1 \left(a = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$. Подставляя это выражение в уравнение (7.31), получаем

$$y = C_1y_1 + C_2ay_1 = (C_1 + aC_2)y_1 = Cy_1,$$

где $C = C_1 + aC_2$.

Отсюда видно, что если y_1 и y_2 — линейно зависимые решения однородного уравнения (7.29), то решение (7.31) содержит только одну произвольную постоянную C и, следовательно, не является общим.

Для общего решения неоднородного уравнения (7.28) справедлива следующая теорема:

Теорема 7.3. *Общее решение неоднородного уравнения* (7.28) *равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения* (7.29) *и любого частного решения данного неоднородного уравнения.*

Доказательство. Пусть $Y = C_1y_1 + C_2y_2$ — общее решение уравнения (7.29), соответствующего уравнению (7.28), и z — любое частное решение уравнения (7.28). Имеем тождества $Y'' + pY' + qY = 0$, $z'' + pz' + qz = f(x)$. Складывая почленно эти два тождества, получаем тождество $(Y+z)'' + p(Y+z)' + q(Y+z) = f(x)$. Следовательно, функция $y = Y + z = C_1y_1 + C_2y_2 + z$ — решение уравнения (7.28) и при этом общее, так как в эту функцию входят две произвольные постоянные C_1 и C_2.

2. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Пусть в линейном уравнении

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{7.32}$$

где p и q — постоянные действительные числа.

Частное решение уравнения (7.32) будем искать в виде функции

$$y = \mathrm{e}^{kx}, \tag{7.33}$$

где k — действительное или комплексное число, подлежащее определению. Дифференцируя по x выражение (7.33), получаем

$$y' = k\mathrm{e}^{kx}, \quad y'' = k^2\mathrm{e}^{kx}. \tag{7.34}$$

Подставляя выражения (7.33) и (7.34) в уравнение (7.32), будем иметь

$$\mathrm{e}^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $\mathrm{e}^{kx} \neq 0$, имеем

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{7.35}$$

Алгебраическое уравнение (7.35) называют *характеристическим уравнением* однородного уравнения (7.32). Характеристическое уравнение и дает возможность найти k. Уравнение (7.35) есть уравнение второй степени и потому имеет два корня. Обозначим их через k_1 и k_2. Возможны три случая.

1) Корни k_1 и k_2 действительные и разные ($k_1 \neq k_2$). В этом случае по формуле (7.33) получим два частных решения уравнения (7.32) $y_1 = \mathrm{e}^{k_1x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{k_2x}$, которые являются линейно независимыми. Действительно, если бы эти решения были линейно зависимы, то в интерва-

ле $(a;\ b)$ должно было бы выполняться тождество $\alpha_1 e^{k_1x} + \alpha_2 e^{k_2x} = 0$, где α_1 и α_2 одновременно не нули, или тождество $\alpha_1 e^{k_1x} = -\alpha_2 e^{k_2x}$. Отсюда $\alpha_1 e^{(k_1-k_2)x} = \alpha_2$, что невозможно, так как справа в последнем тождестве постоянное число, а слева функция от x. По теореме 7.2 следует, что общее решение уравнения (7.32) будет

$$y = C_1 e^{k_1x} + C_2 e^{k_2x}.$$

Пример 7.10. Решим уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Р е ш е н и е. Его характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$ имеет два различных действительных корня $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$. Поэтому общее решение есть $C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2) Корни k_1 и k_2 действительные и равные ($k_1 = k_2$). В этом случае одно частное решение уравнения (7.32) выразится функцией $y_1 = e^{k_1x}$. Частным решением уравнения (7.32) в этом случае будет также функция $y_2 = xe^{k_1x}$. Действительно, $y_2'' + py_2' + qy_2 = (2 + k_1x)k_1e^{k_1x} + p(1 + k_1x)e^{k_1x} + qxe^{k_1x} = e^{k_1x}((k_1^2 + pk_1 + q)x + 2k_1 + p) = e^{k_1x}(-p + p) + 0 = 0.$

Заметим, что решения e^{k_1x} и xe^{k_1x} линейно независимы, так как если бы функции e^{k_1x} и xe^{k_1x} были линейно зависимы, то в интервале $(a;\ b)$ выполнялось бы тождество $\alpha_1 e^{k_1x} + \alpha_2 xe^{k_1x} = 0$ (α_1 и α_2 одновременно не нули) и, значит, тождество $\alpha_1 + \alpha_2 x = 0$, что невозможно. Следовательно, общее решение уравнения (7.33) в данном случае

$$y = C_1 e^{k_1x} + C_2 xe^{k_1x} = e^{k_1x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример 7.11. Уравнению $y'' - 6y' + 9y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$, имеющее равные корни $k_1 = k_2 = 3$. Поэтому общее решение будет

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$$

3) Корни $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$ комплексные. Можно показать (см. [14]), что общее решение уравнения (7.33) в этом случае есть

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

Пример 7.12. Уравнению $y'' - 2y' + 2y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 2 = 0$, имеющее комплексные корни $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$. Следовательно, общим решением будет функция

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

3. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим теперь решение некоторых типов линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (7.36)$$

где p, q — постоянные действительные числа, $f(x)$ — известная непрерывная функция в интервале $(a;\ b)$.

По теореме 7.3 для нахождения общего решения уравнения (7.36) надо знать общее решение Y соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ (для этого используются результаты п. 2 настоящего параграфа) и частное решение z уравнения (7.36).

Вид частного решения уравнения (7.36) зависит от вида правой части этого уравнения. Рассмотрим некоторые случаи.

а) $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0\ (a_2 \neq 0)$. Если $q \neq 0$, то частное решение уравнения (7.36) ищем также в форме квадратного трехчлена:

$$z = A_2x^2 + A_1x + A_0,$$

где A_2, A_1 и A_0 — неопределенные коэффициенты.

Отсюда $z' = 2A_2x + A_1$, $z'' = 2A_2$. Подставляя эти выражения в уравнение (7.36), в котором

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

получаем тождество

$$A_2qx^2 + (2A_2p + A_1q)x + 2A_2 + A_1p + A_0q = a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

откуда

$$A_2q = a_2,\ 2A_2p + A_1q = a_1,\ 2A_2 + A_1p + A_0q = a_0. \qquad (7.37)$$

Так как $q \neq 0$, то из равенств (7.37) для коэффициентов A_2, A_1 и A_0 получаются определенные числовые значения. Тем самым частное решение z будет вполне определено. Если $q = 0$, то частное решение z уравнения (7.36) ищем в виде

$$z = x(A_2x^2 + A_1x + A_0),$$

когда 0 — однократный корень характеристического уравнения (7.35), и в виде

$$z = x^2(A_2x^2 + A_1x + A_0),$$

когда 0 — двукратный корень характеристического уравнения (7.35). Аналогично обстоит дело, если $f(x)$ — многочлен $P(x)$ произвольной степени.

Пример 7.13. Решим уравнение $y'' + y' = 2x + 1$.

Решение. Имеем

$$k^2 + k = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = -1,\ Y = C_1 + C_2e^{-x}.$$

Так как 0 — однократный корень характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $z = x(A_1x + A_0)$. Далее имеем: $z' = 2A_1x + A_0$, $z'' = 2A_1$, $2A_1 + 2A_1x + A_0 = 2x + 1$, $A_1 = 1$, $A_0 = -1$, $z = x^2 - x$, $y = C_1 + C_2e^{-x} + x^2 - x$.

б) $f(x) = ae^{bx}$ $(a \neq 0)$. Частное решение ищем в виде $z = Ae^{bx}$, где A — неопределенный коэффициент. Отсюда $z' = Abe^{bx}$, $z'' = Ab^2e^{bx}$. Подставляя эти выражения в уравнение (7.36), в котором $f(x) = ae^{bx}$, после сокращения на e^{bx} будем иметь $A(b^2 + pb + q) = a$. Отсюда видно, что если b не является корнем характеристического уравнения, то

$$z = \frac{ae^{bx}}{b^2 + pb + q}.$$

Если b — корень характеристического уравнения, то частное решение уравнения (7.36) ищем в виде $z = Axe^{bx}$, когда b — однократный корень, и в виде $z = Ax^2e^{bx}$, когда b — двукратный корень. Аналогично будет, если $f(x) = P(x)e^{bx}$.

Пример 7.14. Решим уравнение $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

Решение. Имеем $k^2 - 2k + 1 = 0$, $k_1 = k_2 = 1$, $Y = (C_1 + C_2x)e^x$. Так как в данном уравнении $b = 1$ — корень кратности 2 характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $z = Ax^2e^x$. Далее имеем

$$z' = Ax(x + 2)e^x, \quad z'' = A(x^2 + 4x + 2)e^x,$$

$$Ae^x(x^2 + 4x + 2) - 2Axe^x(x + 2) + Ax^2e^x = 2e^x, \quad A = 1,$$

$$z = x^2e^x, \quad y = (C_1 + C_2x)e^x + x^2e^x.$$

Выполните задания

Решите уравнения:

1. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$. **2.** $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$.

3. $(1 + e^x)yy' = e^x$. **4.** $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$. **5.** $e^{-y}(1 + y') = 1$.

6. $y' = 2^{x+y}$. **7.** $e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$. **8.** $2xyy' = x^2 + y^2$.

9. $(x + y)dx + xdy = 0$. **10.** $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

11. $y' = \dfrac{x - y}{x - 2y}$. **12.** $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$. **13.** $y' + 2y = e^{-x}$.

Найдите частные решения уравнений:

14. $x^2 + xy' = y$, если $y = 0$ при $x = 1$.

15. $y' + y\cos x = \cos x$, если $y = 1$ при $x = 0$.

16. $x(x - 1)y' + y = x^2(2x - 1)$, если $y = 4$ при $x = 2$.

17. Скорость прямолинейного движения тела задана уравнением

$$v = (2t^2 + t) \text{ см/с}.$$

Найдите путь, пройденный им за 6 с от начала движения.

18. Скорость прямолинейного движения тела

$$v = \left(4t + \frac{6}{t^2}\right) \text{ см/с}.$$

Определите его путь за третью секунду.

Решите уравнения:

19. $y'' = x$. **20.** $y'' = \sin x + \cos x$. **21.** $y'' = e^x$. **22.** $y'' - y = 0$.

23. Найдите частное решение уравнения $y'' = -6x$, удовлетворяющее начальным условиям $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$.

24. Тело движется прямолинейно с ускорением $d^2s(t)/dt^2 = 4$. Найдите закон движения тела, если в начальный момент движения пройденный путь и скорость равнялись нулю.

25. Ускорение прямолинейного движения пропорционально времени. Найдите зависимость между пройденным расстоянием и временем, если при $t = 0$ $v = 0$ и $s = 0$, а также при $t = 1$ $s = 1/3$.

26. Ускорение прямолинейного движения пропорционально квадрату времени. Найдите зависимость между s и t, если при $t = 0$ $v = 0$, $s = 1$ и при $t = 1$ $s = 2$.

Решите уравнения:

27. $y'' - y' - 2y = 0$. **28.** $y'' + 24y' + 144y = 0$. **29.** $y'' - y' - 6y = 0$.
30. $y'' - 7y' + 10y = 0$. **31.** $y'' - 5y = 0$. **32.** $y'' - 22y' + 121y = 0$.
33. $y'' - 4y' + 20y = 0$. **34.** $y'' + 15y' = 0$. **35.** $y'' + 49y = 0$.
36. $y'' + y' = \dfrac{1}{2}$. **37.** $y'' - 9y = 2\quad x$. **38.** $y'' + y' = e^x$.
39. $y'' - 4y' = 4e^{4x}$. **40.** $y'' - y' = 4\quad x$. **41.** $y'' + y = \sin 5x$.
42. $y'' + y = \cos x$.

Глава 8

СОБЫТИЕ И ВЕРОЯТНОСТЬ

8.1. Основные понятия. Определение вероятности

1. Понятие о случайном событии. Опыт, эксперимент, наблюдение явления называется ***испытанием***. Испытаниями, например, являются бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика с нанесенными на каждую грань числом очков — от одного до шести).

Результат, исход испытания, называется ***событием***. Событиями являются выпадение герба или цифры, попадание в цель или промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости.

Для обозначения событий используют прописные (большие) буквы латинского алфавита: A, B, C и т.д.

Определение 1. Два события называют *совместимыми*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Пример 8.1. Испытание — однократное бросание игральной кости. Событие A — появление четырех очков. Событие B — появление четного числа очков. События A и B совместимые.

Определение 2. Два события называют *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример 8.2. Испытание — однократное бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события несовместимы, так как появление одного из них исключает появление другого.

Несовместимость более чем двух событий означает их попарную несовместимость.

Пример 8.3. Испытание — однократное бросание игральной кости. Пусть события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 — соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т.д. Эти события являются несовместимыми.

Определение 3. Два события A и B называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит.

Событие, противоположное событию A, обозначают через $\bar{A}$.

Пример 8.4. Испытание — однократное бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события противоположны, так как исходами бросания могут быть лишь они, и появление одного из них исключает появление другого, т.е. $A = \bar{B}$ или $\bar{A} = B$.

Определение 4. Событие называют *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и невозможным, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Пример 8.5. Испытание — извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие A — вынут белый шар — достоверное событие; событие B — вынут черный шар — невозможное событие.

Заметим, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

Определение 5. Событие A называют *случайным*, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

Пример 8.6. Событие A_6 — выпадение шести очков при бросании игральной кости — случайное. Оно может наступить, но может и не наступить в данном испытании.

Пример 8.7. Событие A_{98} — прорастание девяноста восьми зерен пшеницы из ста — случайное. Это событие может наступить, но, может быть, прорастет зерен больше или меньше.

Можно ли как-то измерить возможность появления некоторого случайного события? Другими словами, можно ли охарактеризовать эту возможность некоторым числом?

2. Классическое определение вероятности. Всякое испытание влечет за собой некоторую совокупность исходов — результатов испытания, т.е. событий. Во многих случаях возможно перечислить все события, которые могут быть исходами данного испытания.

Определение 1. Говорят, что совокупность событий образует *полную группу событий* для данного испытания, если его результатом обязательно становится хотя бы одно из них.

Приведем примеры полных групп событий: выпадение герба и выпадение цифры при одном бросании монеты; попадание в цель и промах при одном выстреле; выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков при одном бросании игральной кости.

Рассмотрим полную группу попарно несовместимых событий $U_1, U_2, ..., U_n$, связанную с некоторым испытанием. Предположим, что в этом испытании осуществление каждого из событий U_i ($i = 1, 2, ..., n$) равновозможно, т.е. условия испытания не создают преимущества в появлении какого-либо события перед другими возможными.

Определение 2. События $U_1, U_2, ..., U_n$, образующие полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий, будем называть *элементарными событиями*.

Пример 8.8. Вернемся к опыту с подбрасыванием игральной кости. Пусть U_i — событие, состоящее в том, что кость выпала гранью с цифрой i. Как уже отмечалось, события $U_1, U_2, ..., U_6$ образуют полную группу попарно несовместимых событий. Так как кость предполагается однородной и симметричной, то события $U_1, U_2, ..., U_6$ являются и равновозможными, т.е. элементарными.

Определение 3. Событие A *называют благоприятствующим* событию B, если наступление события A влечет за собой наступление события B.

Пример 8.9. Пусть при бросании игральной кости события U_2, U_4 и U_6 — появление соответственно двух, четырех и шести очков и A — событие, состоящее в появлении четного числа очков; события U_2, U_4 и U_6 благоприятствуют событию A.

Определение 4 (классическое определение вероятности). *Вероятностью* $P(A)$ события A называют отношение $\frac{m}{n}$ числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу всех элементарных событий, т.е.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Пример 8.10. Вычислим вероятность выпадения герба при одном бросании монеты.

Решение. Очевидно, событие A — выпадение герба и событие B — выпадение цифры образуют полную группу несовместимых и равновозможных событий для данного испытания. Значит, здесь $n = 2$. Событию A благоприятствует лишь одно событие — само A, т.е. здесь $m = 1$. Поэтому $P(A)=\frac{1}{2}$.

Пример 8.11. Очевидно, что в опыте с игральной костью (пример 8.8) $P(U_i)=\frac{1}{6}$, $i = 1, 2, ..., 6$.

Пример 8.12. Найдем вероятность того, что при однократном бросании игральной кости выпадет число очков, делящееся на 2 (событие A).

Решение. Число элементарых событий здесь 6, а число благоприятствующих элементарных событий 3 (выпадение 2, 4 и 6), поэтому

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Из приведенного классического определения вероятности вытекают следующие ее свойства.

1. ***Вероятность достоверного события равна единице.*** Действительно, достоверному событию должны благоприятствовать все n элементарных событий, т.е. $m = n$ и, следовательно,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

2. ***Вероятность невозможного события равна нулю.*** В самом деле, невозможному событию не может благоприятствовать ни одно из элементарных событий, т.е. $m = 0$, откуда

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0.$$

3. ***Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.***

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных событий. Поэтому в этом случае $0 < m < n$ и, значит, $0<\frac{m}{n}<1$. Следовательно, $0 < P(A) < 1$.

Итак, *вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству*

$$0 \le P(A) \le 1.$$

3. Относительная частота. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности не является пригодным для изучения произвольных случайных событий. Так, оно неприемлемо, если результаты испытания не равновозможны. Например, при бросании неправильной игральной кости выпадение ее различных граней не равновозможно.

В таких случаях используется, так называемое, статистическое определение вероятности.

Пусть произведено n испытаний, при этом некоторое событие A наступило m раз ($m \le n$).

Определение 1. Число m называют *абсолютной частотой* (или просто *частотой*) события A, а отношение

$$P^*(A)=\frac{m}{n}$$

называют *относительной частотой* события A.

Пример 8.13. При транспортировке из 10 000 арбузов испортилось 26. Здесь $m = 26$ — абсолютная частота испорченных арбузов, а

$$P^*(A)=\frac{26}{10\,000}=0{,}0026 \text{ — относительная.}$$

Результаты многочисленных опытов и наблюдений помогают заключить: при проведении серий из n испытаний, когда число n сравнительно мало, относительная частота $P^*(A)$ принимает значения, которые могут довольно сильно отличаться друг от друга. Но с увеличением n — числа испытаний в сериях — относительная частота

$$P^*(A) = \frac{m}{n}$$

приближается к некоторому числу $P(A)$, стабилизируясь возле него и принимая все более устойчивые значения.

Пример 8.14. Было проведено 10 серий бросаний монеты, по 1 000 бросаний в каждой. Относительные частоты выпадения герба оказались равными 0,501; 0,485; 0,509; 0,536; 0,485; 0,488; 0,500; 0,497; 0,494; 0,484 (см. [16]). Эти частоты группируются около числа 0,5.

Определение 2 (статистическое определение вероятности). Вероятностью события A в данном испытании называют число $P(A)$, около которого группируются значения относительной частоты при больших n.

В условиях только что приведенного примера 8.14 указанная вероятность равна 0,5.

Пример 8.15. По официальным данным шведской статистики относительные частоты рождения девочек по месяцам 1935 г. характеризуются следующими числами (расположены в порядке следования месяцев, начиная с января): 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473 (см. [4]). Эти частоты группируются около числа 0,482.

Таким образом, относительная частота события приближенно совпадает с его вероятностью, если число испытаний достаточно велико. Имеется огромный опытный материал по проверке последнего утверждения. Укажем еще один такой пример с бросанием монеты [4].

Экспериментатор	Число бросаний	Число выпадений герба	Относительная частота
Бюффон	4 040	2 048	0,5080
К. Пирсон	12 000	6 019	0,5016
К. Пирсон	24 000	12 012	0,5005

Здесь относительные частоты незначительно отклоняются от числа 0,5, причем тем меньше, чем больше число испытаний. При 4 040 испытаниях отклонение равно 0,008, а при 24 000 — 0,0005.

Пример 8.16. Чтобы знать, какова вероятность для данного станка изготовить годную деталь, поступают так: проверяют одну или несколько партий деталей, изготовленных станком, подсчитывают число годных деталей, вычисляют относительную частоту и в соответствии с определением вероятность принимают равной этой частоте. Допустим, при проверке партии из 200 деталей 190 оказались годными. Тогда вероятность наудачу выбранной детали быть годной

$$P \approx \frac{190}{200} = 0{,}95.$$

Вероятность найдена приближенно, так как 0,95 — это относительная частота.

Аналогичным образом поступают, например, при определении процента всхожести семян.

4. Основные формулы комбинаторики. ***Комбинаторика*** — раздел математики, изучающий вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов).

Как при решении задач с использованием классического определения вероятности, так и в дальнейшем нам понадобятся некоторые формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребительные из них.

Определение 1. *Размещениями* из n различных элементов по m элементов ($m \le n$) называют комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Например, из трех элементов a, b, c можно составить по два элемента следующих размещений:

$$ab, ac, bc, ba, ca, cb.$$

Число различных размещений из n элементов по m элементов определяется с помощью формулы

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

Пример 8.17. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2? Искомое число сигналов $A_6^2 = 6\cdot 5 = 30$.

Определение 2. *Перестановками* из n различных элементов называют размещения из этих n элементов по n.

Как видно из определений 1 и 2, перестановки можно считать частным случаем размещений при $m = n$. Следовательно, число всех перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Пример 8.18. Для лечения заболевания применяют три лекарства. Полагают, что последовательность, в которой применяют лекарства, оказывает существенное влияние на результат лечения. Сколько имеется различных порядков назначения этих лекарств?

Решение. Имеется $P_3 = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ различных порядков назначения трех лекарств.

Определение 3. *Сочетаниями* из n различных элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Отметим разницу между сочетаниями и размещениями: в первых не учитывается порядок элементов.

Число сочетаний из n элементов по m элементов вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(m-1)m}$$

или

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \qquad (8.1)$$

Отметим особенность формулы (8.1):

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Пример 8.19. В лабораторной клетке содержат трех белых и трех коричневых мышей. Найти число способов выбора двух мышей, если они могут быть любого цвета.

Решение. В данном случае цвет не существен. Поэтому имеется $C_6^2 = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$ способов, которыми двух мышей можно выбрать из шести.

Приведем, наконец, один из примеров применения формул комбинаторики к нахождению вероятности события.

Пример 8.20. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

Решение. Две последние цифры можно набрать A_{10}^2 способами, а благоприятствовать событию M (цифры набраны правильно) будет только один способ, поэтому

$$P(M) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10\cdot 9} = \frac{1}{90}.$$

8.2. Свойства вероятности

1. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.

Определение 1. *Суммой* событий A и B называют событие $C = A + B$, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий A или B.

Пример 8.21. Испытание — стрельба двух стрелков (каждый делает по одному выстрелу). Событие A — попадание в мишень первым стрелком, событие B — попадание в мишень вторым стрелком. Суммой событий A и B будет событие $C = A + B$, состоящее в попадании в мишень, по крайней мере, одним стрелком.

Аналогично суммой конечного числа событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ называют событие $A = A_1 + A_2 + \dots + A_k$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_i ($i = 1, \dots, k$).

Определение 2. *Произведением* событий A и B называют событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошло и событие A и событие B.

Аналогично произведением конечного числа событий $A_1, A_2, ..., A_k$ называют событие $A = A_1A_2...A_k$, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.

В условиях предыдущего примера произведением событий A и B будет событие $C = AB$, состоящее в попадании в мишень двух стрелков.

Из определения произведения событий непосредственно следует, что $AB = BA$.

Теорема 8.1. *Вероятность суммы двух несовместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{8.2}$$

Доказательство. Используем классическое определение вероятности. Предположим, что в данном испытании число всех элементарных событий равно n, событию A благоприятствуют k элементарных событий, событию B – l элементарных событий. Так как A и B — несовместимые события, то ни одно из элементарных событий $U_1, U_2, ..., U_n$ не может одновременно благоприятствовать и событию A и событию B. Следовательно, событию $A + B$ будет благоприятствовать $k + l$ элементарных событий. По определению вероятности

$$P(A) = \frac{k}{n}, P(B) = \frac{l}{n}, P(A+B) = \frac{k+l}{n},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Совершенно так же теорема формулируется и доказывается для любого конечного числа попарно несовместимых событий.

Следствие. *Сумма вероятностей противоположных событий A и $\bar{A}$ равна единице:*

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \tag{8.3}$$

Так как события A и $\bar{A}$ несовместимы, то по доказанной выше теореме $P(A) + P(\bar{A}) = P(A + \bar{A})$. Событие $A + \bar{A}$ есть достоверное событие (ибо одно из событий A или $\bar{A}$ произойдет). Поэтому $P(A + \bar{A}) = 1$, что и приводит к искомому соотношению (8.3).

Пример 8.22. В урне 10 шаров: 3 красных, 5 синих и 2 белых. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?

Решение. Вероятность вынуть красный шар $P(A) = \frac{3}{10}$, синий $P(B) = \frac{5}{10}$. Так как события A и B несовместимы, то по доказанной выше теореме (8.1)

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = 0{,}8.$$

Пример 8.23. На клумбе растут 20 красных, 30 синих и 40 белых астр. Какова вероятность сорвать в темноте окрашенную астру, если срывают одну астру?

Решение. Искомая вероятность равна сумме вероятностей сорвать красную или синюю астру, т.е.

$$P=\frac{20}{90}+\frac{30}{90}=\frac{50}{90}=\frac{5}{9}.$$

2. Теорема умножения вероятностей.

Определение 1. Два события A и B называют *независимыми*, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет[1]. В противном случае события A и B называют *зависимыми*.

Пример 8.24. Пусть в урне находятся 2 белых и 2 черных шара. Пусть событие A — вынут белый шар. Очевидно, $P(A)=\frac{1}{2}$. После первого испытания вынутый шар кладется обратно в урну, шары перемешиваются и снова вынимается шар. Событие B — во втором испытании вынут белый шар — также имеет вероятность $P(B)=\frac{1}{2}$, т.е. события A и B — независимые.

Предположим теперь, что вынутый шар в первом испытании не кладется обратно в урну. Тогда если произошло событие A, т.е. в первом испытании вынут белый шар, то вероятность события B уменьшается $\left(P(B)=\frac{1}{3}\right)$; если в первом испытании был вынут черный шар, то вероятность события B увеличивается $\left(P(B)=\frac{2}{3}\right)$.

Итак, вероятность события B существенно зависит от того, произошло или не произошло событие A, в таких случаях события A и B — зависимые.

Определение 2. Пусть A и B — зависимые события. *Условной вероятностью* $P_A(B)$ события B называют вероятность события B, найденную в предположении, что событие A уже наступило.

Так, в примере 8.24 $P_A(B)=\frac{1}{3}$.

Заметим, что если события A и B независимы, то $P_A(B) = P(B)$.

Теорема 8.2. *Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB)=P(A)P_A(B). \tag{8.4}$$

[1] Несколько событий $A_1, \ldots, A_k$ называют независимыми в совокупности (или просто независимыми), если вероятность появления любого из них не зависит от того, произошли какие-либо другие рассматриваемые события или нет.

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A и пусть из этих k событий l благоприятствуют событию B, а значит, и событию AB. Тогда

$$P(AB)=\frac{l}{n}=\frac{k}{n}\cdot\frac{l}{k}=P(A)P_A(B),$$

что и доказывает искомое равенство (8.4).

Замечание. Применив формулу (8.4) к событию BA, получим

$$P(BA)=P(B)P_B(A). \tag{8.5}$$

Так как $AB = BA$ (см. п. 1), то, сравнивая (8.4) и (8.5), получаем, что

$$P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\ P_B(A).$$

Пример 8.25. В условиях примера 8.24 берем тот случай, когда вынутый шар в первом испытании не кладется обратно в урну. Поставим следующий вопрос: какова вероятность вынуть первый и второй раз белые шары?

Решение. По формуле (8.4) имеем

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Пример 8.26. Предположим, что вероятности встретить реку, загрязняемую постоянным фактором $P(A)$, временным фактором $P(B)$ и обоими факторами $P(AB)$, равны соответственно 0,4; 0,1 и 0,05.

Решение. Найдем:

1) вероятность того, что река, загрязняемая временным фактором, будет к тому же загрязнена и постоянным фактором, т.е. $P_B(A)$; 2) вероятность того, что река, загрязняемая постоянным фактором, будет еще загрязнена и временным фактором, т.е. $P_A(B)$. Из формулы (8.5) находим

$$P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)},$$

откуда

$$P_B(A)=\frac{0{,}05}{0{,}1}\quad 0{,}5.=$$

Аналогично, используя формулу (8.4), находим

$$P_A(B)=\frac{0{,}05}{0{,}4}\quad 0{,}125.$$

Теорема 8.3. *Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий*[1]:

$$P(AB)=P(A)\ P(B). \tag{8.6}$$

[1] В случае независимых событий эта теорема распространяется на любое конечное число их.

Действительно, если A и B — независимые события, то $P_A(B) = P(B)$ и формула (8.4) превращается в формулу (8.6).

Пример 8.27. Вероятность выживания одного организма в течение 20 мин $P = 0{,}7$. В пробирке с благоприятными для существования этих организмов условиями находятся только что родившиеся 2 организма. Какова вероятность того, что через 20 мин они будут живы?

Решение. Пусть событие A — первый организм жив через 20 мин, событие B — второй организм жив через 20 мин. Будем считать, что между организмами нет внутривидовой конкуренции, т. е. события A и B независимы. Событие, что оба организма живы, есть событие AB. По теореме 8.3 получаем $P(AB) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$.

3. Теорема сложения вероятностей совместимых событий.

Теорема 8.4. *Вероятность суммы двух совместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения, т. е.*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{8.7}$$

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A, l — событию B и m — одновременно событиям A и B. Отсюда событию $A + B$ благоприятствуют $k + l - m$ элементарных событий. Тогда

$$P(A+B) = \frac{k+l-m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} - \frac{m}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Замечание. Если события A и B несовместимы, то их произведение AB есть невозможное событие и, следовательно, $P(AB) = 0$, т. е. формула (8.2) является частным случаем формулы (8.7).

Пример 8.28. В посевах пшеницы на делянке имеется 95 % здоровых растений. Выбирают два растения. Определим вероятность того, что среди них хотя бы одно окажется здоровым.

Решение. Введем обозначения для событий:

A_1 — первое растение здоровое;

A_2 — второе растение здоровое;

$A_1 + A_2$ — хотя бы одно растение здоровое.

Так как события A_1 и A_2 совместимые, то согласно формуле (8.7)

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = 0{,}95 + 0{,}95 - 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9975 \approx 1.$$

4. Формула полной вероятности.

Теорема 8.5. *Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из n попарно несовместимых событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:*

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A) \tag{8.8}$$

(*формула полной вероятности*).

Доказательство. Событие A может наступить лишь при условии наступления одного из событий $B_1, B_2, ..., B_n$, т.е. $A = B_1A + B_2A + ... + B_nA$, причем ввиду несовместимости событий $B_1, B_2, ..., B_n$ события $B_1A, B_2A, ..., B_nA$ также несовместимы. Поэтому на основании теорем сложения и умножения вероятностей имеем

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + ... + P(B_nA) = P(B_1)P_{B_1}(A) +$$
$$+ P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Пример 8.29. Для приема зачета преподаватель заготовил 50 задач: 20 задач по дифференциальному исчислению, 30 по интегральному исчислению. Для сдачи зачета студент должен решить первую же доставшуюся наугад задачу. Какова вероятность для студента сдать зачет, если он знает как решить 18 задач по дифференциальному исчислению и 15 задач по интегральному исчислению?

Решение. Вероятность получить задачу по дифференциальному исчислению (событие B_1) равна $P(B_1) = 0{,}4$; по интегральному исчислению (событие B_2) — $P(B_2) = 0{,}6$. Если событие A означает, что задача решена, то $P_{B_1}(A) = 0{,}9, P_{B_2}(A) = 0{,}5$. Теперь по формуле (8.8) имеем $P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}36 + 0{,}3 = 0{,}66$.

Пример 8.30. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом находятся две белые мыши и одна серая, во втором — три белые и одна серая, в третьем — две белые и две серые мыши. Какова вероятность того, что из наугад выбранного ящика будет извлечена белая мышь?

Решение. Обозначим B_1 — выбор первого ящика,
B_2 — выбор второго ящика,
B_3 — выбор третьего ящика,
A — извлечение белой мыши.

Так как все ящики одинаковы, то $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$. Если выбран первый ящик, то $P_{B_1}(A) = \frac{2}{3}$. Аналогично $P_{B_2}(A) = \frac{3}{4}, P_{B_3}(A) = \frac{1}{2}$. Наконец, по формуле (8.8) получаем

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{36}.$$

5. Формула Бейеса. Пусть в условиях рассуждения, относящегося к формуле полной вероятности, произведено одно испытание, в результате которого произошло событие A. Спрашивается: как изменились (в связи с тем, что событие A уже произошло) величины $P(B_k)$, $k = 1, ..., n$?

Найдем условную вероятность $P_A(B_k)$.

По теореме умножения вероятностей и формуле (8.5) (см. п. 2) имеем

$$P(AB_k) = P(A)P_A(B_k) = P(B_k)P_{B_k}(A).$$

Отсюда

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{P(A)}.$$

Наконец, используя формулу полной вероятности, находим

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P_{B_j}(A)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.9}$$

Формулу (8.9) называют *формулой Бейеса*[1].

Пример 8.31. Большая популяция людей разбита на две группы одинаковой численности. Диета одной группы отличалась высоким содержанием ненасыщенных жиров, а диета контрольной группы была богата насыщенными жирами. После 10 лет пребывания на этих диетах возникновение сердечно-сосудистых заболеваний составило в этих группах соответственно 31 % и 48 %. Случайно выбранный из популяции человек имеет сердечно-сосудистое заболевание. Какова вероятность того, что этот человек принадлежит к контрольной группе?

Решение. Введем обозначения для событий:

A — случайно выбранный из популяции человек имеет сердечно-сосудистое заболевание;

B_1 — человек придерживался специальной диеты;

B_2 — человек принадлежал к контрольной группе.

Имеем

$$P(B_1) = P(B_2) \quad 0{,}5, \quad =$$

$$P_{B_1}(A) = 0{,}31,$$

$$P_{B_2}(A) = 0{,}48.$$

Согласно формуле полной вероятности

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}31 + 0{,}5 \cdot 0{,}48 = 0{,}395$$

и, наконец, в силу формулы (8.9) искомая вероятность

$$P_A(B_2) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}48}{0{,}395} \approx 0{,}61.$$

Выполните задания

1. В ящике имеется 100 яиц, из них 5 некачественных. Наудачу вынимают одно яйцо. Найдите вероятность того, что вынутое яйцо некачественное.

2. Брошена игральная кость. Найдите вероятность того, что выпадет четное число очков.

3. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найдите вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

4. В сосуд вместимостью 10 л попала ровно одна болезнетворная бактерия. Какова вероятность зачерпнуть ее при наборе из этого сосуда стакана воды (200 см^3)?

[1] Томас Бейес, или Байес, (1702 — 1761) — английский математик.

5. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительня частота появления нестандартных деталей?

6. При транспортировке из 1 000 дынь испортилось 5. Чему равна относительная частота испорченных дынь?

7. При стрельбе по мишени вероятность сделать отличный выстрел равна 0,3, а вероятность выстрела на оценку «хорошо» равна 0,4. Какова вероятность получить за сделанный выстрел оценку не ниже «хорошо»?

8. Вероятность того, что человек умрет на 71-м году жизни, равна 0,04. Какова вероятность того, что он не умрет на 71-м году?

9. Бросается один раз игральная кость. Определите вероятность выпадения 3 или 5 очков.

10. В урне 30 шаров: 15 белых, 10 красных и 5 синих. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?

11. В денежно-вещевой лотерее на серию в 1 000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет?

12. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найдите вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.

13. В колоде 36 карт. Наудачу вынимают из колоды 2 карты. Определите вероятность того, что вторым вынут туз, если первым тоже вынут туз.

14. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найдите вероятность того, что оба шара белые.

15. Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут вынуты подряд два туза?

16. Два стрелка стреляют по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, вторым стрелком — 0,7. Найти вероятность поражения цели двумя пулями в одном залпе.

17. Найдите вероятность одновременного появления герба при одном бросании двух монет.

18. Имеется два ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найдите вероятность того, что все две вынутые детали окажутся стандартными.

19. В семье двое детей. Принимая события, состоящие в рождении мальчика и девочки равновероятными, найдите вероятность того, что в семье: а) все девочки; б) дети одного пола.

20. Пусть всхожесть семян оценивается вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что из двух посеянных семян взойдет какое-либо одно?

21. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?

22. Брошена игральная кость. Найдите вероятность того, что выпадет четное или кратное трем число очков.

23. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго — 0,9. Найдите вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) — стандартная.

24. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке — 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найдите вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

25. Студент M может заболеть гриппом (событие A) только в результате либо переохлаждения (событие B), либо контакта с другим больным (событие C). Требуется найти $P(A)$, если $P(B) = 0{,}5$, $P(C) = 0{,}5$, $P_B(A) = 0{,}3$, $P_C(A) = 0{,}1$ при условии несовместимости B и C.

26. В коробке находятся 6 новых и 2 израсходованные батарейки для карманного фонарика. Какова вероятность того, что две вынутые из коробки наудачу батарейки окажутся новыми?

27. На трех карточках написаны буквы У, К, Ж. После тщательного перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «ЖУК»?

28. Слово «керамит» составлено из букв разрезной азбуки. Затем карточки с буквами перемешиваются, и из них извлекаются по очереди четыре карточки. Какова вероятность, что эти четыре карточки в порядке выхода составят слово «река»?

Глава 9

ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

9.1. Случайные величины

1. Понятие «случайные величины».

Определение 1. *Случайной величиной* называют переменную величину, которая в зависимости от исхода испытания случайно принимает одно значение из множества возможных значений.

Пример 9.1. 1) Число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости, есть случайная величина, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6;

2) прирост массы домашнего животного за месяц есть случайная величина, которая может принять значение из некоторого числового промежутка;

3) число родившихся мальчиков среди пяти новорожденных есть случайная величина, которая может принять значения 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Случайные величины будем обозначать прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения — соответствующими строчными буквами x, y, z. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: x_1, x_2, x_3.

Определение 2. Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется *дискретной* случайной величиной.

Ниже рассматриваются дискретные случайные величины, множество допустимых значений которых конечно.

Случайные величины из примера 9.1, см. 1) и 3) дискретные.

Определение 3. Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка, называется *непрерывной* случайной величиной.

Случайная величина из примера 9.1, см. 2) является непрерывной.

Определение 4. Под суммой (произведением) случайных величин X и Y понимают случайную величину $Z = X + Y$ ($Z = XY$), возможные значения которой состоят из сумм (произведений) каждого возможного значения величин X и Y.

2. Законы распределения дискретных случайных величин. Рассмотрим дискретную случайную величину X с конечным множеством возможных значений. Величина X считается заданной, если перечислены все ее возможные значения, а также вероятности, с которыми величина X может принять эти значения. Указанный перечень возможных значений и их вероятностей называют *законом распределения* дискретной случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан с помощью таблицы:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
p	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-1}	p_n

В верхней строке выписывают возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ величины X, в нижней строке выписывают вероятности $p_1, p_2, ..., p_n$ значений $x_1, x_2, ..., x_n$. Читается таблица следующим образом: случайная величина X может принять значение x_i с вероятностью p_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Так как в результате испытания величина X всегда примет одно из значений $x_1, x_2, ..., x_n$, то

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Пример 9.2. В денежной лотерее разыгрывается 1 выигрыш в 100 000 р., 10 выигрышей по 10 000 р. и 100 выигрышей по 100 р. при общем числе билетов 10 000. Найти закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Здесь возможные значения для X есть: $x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_3 = 10\,000$, $x_4 = 100\,000$. Вероятности их будут: $p_2 = 0{,}01$, $p_3 = 0{,}001$, $p_4 = 0{,}0001$, $p_1 = 1 - 0{,}01 - 0{,}001 - 0{,}0001 = 0{,}9889$. Следовательно, закон распределения выигрыша X может быть задан таблицей:

X	0	100	10 000	100 000
p	0,9889	0,01	0,001	0,0001

9.2. Математическое ожидание дискретной случайной величины

1. Понятие математического ожидания. Закон распределения полностью задает дискретную случайную величину. Однако часто встречаются случаи, когда закон распределения случайной величины неизвестен. В таких случаях случайную величину изучают по ее числовым характеристикам. Одной из таких характеристик является *математическое ожидание*.

Пусть некоторая дискретная случайная величина X с конечным числом своих значений задана законом распределения:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

О п р е д е л е н и е. Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех возможных значений величины X на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n. \tag{9.1}$$

Пример 9.3. Используя условие примера 9.2, найдем математическое ожидание выигрыша X в примере из подразд. 9.1, п. 2.

Р е ш е н и е. Из полученной в примере 9.2 таблицы имеем

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}9889 + 100 \cdot 0{,}01 + 10000 \cdot 0{,}001 + 100000 \cdot 0{,}0001 = 1 + 10 + 10 = 21 \text{ р.}$$

Очевидно, $M(X) = 21$ р. есть справедливая цена одного лотерейного билета.

Теорема 9.1. *Математическое ожидание дискретной случайной величины X приближенно равно среднему арифметическому всех ее значений (при достаточно большом числе испытаний).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что произведено n испытаний, в которых дискретная случайная величина X приняла значения $x_1, \ldots, x_k$ соответственно $m_1, \ldots, m_k$ раз, так что $m_1 + \ldots + m_k = n$. Тогда среднее арифметическое всех значений, принятых величиной X, выразится равенством

$$x_{\text{ср}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}$$

или

$$x_{\text{ср}} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n}.$$

Так как коэффициент $\frac{m_i}{n}$ является относительной частотой события «величина X приняла значение x_i» ($i = 1, 2, \ldots, k$), то

$$x_{\text{ср}} = x_1 p_1^* + x_2 p_2^* + \ldots + x_k p_k^*.$$

Из статистического определения вероятности следует, что при достаточно большом числе испытаний $p_i^* \approx p_i \, (i = 1, 2, \ldots, k)$. Поэтому

$$x_{\text{ср}} \approx x_1 p_1 + x p_2 + \ldots + x_k p_k$$

или

$$x_{\text{ср}} \approx M(X).$$

П р и м е ч а н и е. В связи с только что установленной теоремой математическое ожидание случайной величины называют также ее *средним значением*, или *ожидаемым значением*.

2. Свойства математического ожидания дискретной случайной величины.

1. *Математическое ожидание постоянной величины C равно этой величине.*

Постоянную C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение C с вероятностью $p = 1$. Поэтому $M(C) = C \cdot 1 = C$.

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е. $M(CX) = C\,M(X)$.*

Используя соотношение (9.1), имеем

$$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \ldots + Cx_np_n =$$

$$= C(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n) = CM(X).$$

Следующие два (3 и 4) свойства примем без доказательства.

3. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин X и Y равно сумме их математических ожиданий:*

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

О п р е д е л е н и е. Случайные величины X и Y называют *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое возможное значение приняла другая величина.

Примером двух независимых случайных величин могут служить суммы выигрышей по каждому из двух билетов по двум различным денежно-вещевым лотереям. Здесь ставший известным размер выигрыша по билету одной лотереи не влияет на ожидаемый размер выигрыша и соответствующую ему вероятность по билету другой лотереи.

Несколько случайных величин называют независимыми, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные случайные величины.

4. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:*

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

Следствием свойств 2 и 3 является свойство 5.

5. *Математическое ожидание разности двух случайных величин X и Y равно разности их математических ожиданий:*

$$M(X-Y) = M(X) - M(Y).$$

П р и м е ч а н и я. 1. Свойства 3 и 4 имеют место и для любого конечного числа случайных величин.

2. Если множество возможных значений дискретной случайной величины X бесконечно, то математическое ожидание $M(X)$ определяется суммой числового ряда $M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ при условии, что этот ряд абсолютно сходится (в противном случае говорят, что математическое ожидание $M(X)$

не существует). Перечисленные свойства математического ожидания остаются в силе [4] и для таких случайных величин.

Пример 9.4. Найдем математическое ожидание случайной величины $Z = X + 2Y$, если известны математические ожидания случайных величин X и Y: $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$.

Решение. Используя свойства 3 и 2 математического ожидания, получаем

$$M(Z) = M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) = M(X) + 2M(Y) = 5 + 2 \cdot 3 = 11.$$

Пример 9.5. Независимые случайные величины заданы законами распределения

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Найти математическое ожидание случайной величины XY.

Решение. Найдем математические ожидания каждой из данных величин:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}8 = 1{,}8,$$

$$M(Y) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}7 = 0{,}15 + 0{,}7 = 0{,}85.$$

Случайные величины X и Y независимы, поэтому искомое математическое ожидание

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y) = 1{,}8 \cdot 0{,}85 = 1{,}53.$$

9.3. Дисперсия дискретной случайной величины

1. Понятие дисперсии. Математическое ожидание не дает полной характеристики закона распределения случайной величины. Покажем это на примере. Пусть заданы две дискретные случайные величины X и Y своими законами распределения:

X	–2	0	2
p	0,4	0,2	0,4

Y	–100	0	100
p	0,3	0,4	0,3

Несмотря на то что математические ожидания величин X и Y одинаковы: $M(X) = M(Y) = 0$, возможные значения величин X и Y «разбросаны» или «рассеяны» около своих математических ожиданий по-разному: возможные значения величины X расположены гораздо ближе к своему математическому ожиданию, чем значения величины Y.

Укажем еще на один пример. При одинаковой средней величине годовых осадков одна местность может быть засушливой и неблагоприятной для сельскохозяйственных работ (нет дождей весной и летом), а другая — благоприятной для ведения сельского хозяйства.

Из сказанного вытекает необходимость введения новой числовой характеристики случайной величины, по которой можно судить о «рассеянии» возможных значений этой случайной величины.

Пусть задана дискретная случайная величина X:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Определение 1. ***Отклонением*** случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$ (или просто отклонением случайной величины X) называют случайную величину $X - M(X)$.

Видно, что для того, чтобы отклонение случайной величины X приняло значение $x_1 - M(X)$, достаточно, чтобы случайная величина X приняла значение x_1. Вероятность же этого события равна p_1; следовательно, и вероятность того, что отклонение случайной величины X примет значение $x_1 - M(X)$, также равна p_1. Аналогично обстоит дело и для остальных возможных значений отклонения случайной величины X. Используя это, запишем закон распределения отклонения случайной величины X:

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	...	$x_n - M(X)$
p	p_1	p_2	...	p_n

Вычислим теперь математическое ожидание отклонения $X - M(X)$. Пользуясь свойствами 5 и 1 (подразд. 9.2, п. 2), получаем

$$M[X - M(X)] = M(X) - M(X) = 0.$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 9.2. *Математическое ожидание отклонения $X - M(X)$ равно нулю:*

$$M[X - M(X)] = 0.$$

Из теоремы видно, что с помощью отклонения $X - M(X)$ не удается определить среднее отклонение возможных значений величины X от ее математического ожидания, т.е. степень рассеяния величины X. Это объясняется взаимным погашением положительных и отрицательных возможных значений отклонения. Однако можно освободиться от этого недостатка, если рассматривать квадрат отклонения случайной величины X.

Запишем закон распределения случайной величины $[X - M(X)]^2$ (рассуждения те же, что и в случае случайной величины $X - M(X)$).

$[X - M(X)]^2$	$[x_1 - M(X)]^2$	$[x_2 - M(X)]^2$	...	$[x_n - M(X)]^2$
p	p_1	p_2	...	p_n

Определение 2. *Дисперсией* $D(X)$ дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2].$$

Из закона распределения величины $[X - M(X)]^2$ следует, что

$$D(X) = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + [x_2 - M(X)]^2 p_2 + \ldots + [x_n - M(X)]^2 p_n.$$

2. Свойства дисперсии дискретной случайной величины.

1. ***Дисперсия дискретной случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата величины X и квадратом ее математического ожидания***:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Действительно, используя свойств математического ожидания, имеем

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)]$$
$$= M(X^2) - 2M(X)\,M(X) + M^2(X) =$$
$$= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

С помощью этого свойства и свойства математического ожидания устанавливаются следующие свойства.

2. ***Дисперсия постоянной величины С равна нулю.***

3. ***Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат***:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

4. ***Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин***:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Методом математической индукции это свойство распространяется и на случай любого конечного числа слагаемых.

Следствием свойств 3 и 4 является свойство 5.

5. ***Дисперсия разности двух независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий***:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Пример 9.6. Дисперсия случайной величины X равна 3. Найти дисперсию следующих величин: а) $-3X$; б) $4X + 3$.

Согласно свойствам 2, 3 и 4 дисперсии имеем а) $D(-3X) = 9D(X) = 9 \cdot 3 = 27$;

б) $D(4X + 3) = D(4X) + D(3) = 16D(X) + 0 = 16 \cdot 3 = 48$.

3. Среднее квадратическое отклонение.

Определение. *Средним квадратическим отклонением* $\sigma(X)$ случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Введение среднего квадратического отклонения объясняется тем, что дисперсия измеряется в квадратных единицах относительно размерности самой случайной величины. Например, если возможные значения некоторой случайной величины измеряются в метрах, то ее дисперсия измеряется в квадратных метрах. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений в той же размерности, что и сама случайная величина, и используется среднее квадратическое отклонение.

Пример 9.7. Случайная величина X — число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Определим $\sigma(X)$.

Решение. Имеем

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5;$$

$$D(X) = (1 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} +$$

$$+ (4 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (5 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}71.$$

Здесь для облегчения вычислений можно использовать калькулятор. То же следует иметь в виду и в ряде других примеров этой главы.

4. Понятие о моментах распределения.

Определение 1. *Начальным моментом порядка k* случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины X^k, где k — натуральное число:

$$\nu_k = M(X^k).$$

Следовательно, если X имеет распределение

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

то

$$\nu_k = x_1^k p_1 + x_2^k p_2 + \ldots + x_n^k p_n.$$

Математическое ожидание и дисперсию случайной величины X можно выразить через начальные моменты порядков 1 и 2:

$$M(X) = \nu_1,$$
$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \nu_2 - \nu_1^2. \qquad (9.2)$$

Определение 2. *Центральным моментом порядка k* случайной величины X называется математическое ожидание величины $[X - M(X)]^k$:

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k].$$

Из определения центрального момента порядка k, теоремы 9.2 и определения дисперсии следует, что

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0,$$
$$\mu_2 = M[(X - M(X))^2] = D(X). \qquad (9.3)$$

Сравнивая соотношения (9.2) и (9.3), получаем

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2.$$

Пример 9.8. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3
p	0,4	0,6

Найдем начальные моменты первого, второго порядков и центральный момент второго порядка.

Решение. Имеем:

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}6 = 2{,}2;$$
$$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}6 = 5{,}8;$$
$$\mu_2 = 5{,}8 - 2{,}2^2 = 5{,}8 - 4{,}84 = 0{,}96.$$

9.4. Непрерывные случайные величины

1. Интегральная функция распределения. Для непрерывной случайной величины в отличие от дискретной нельзя построить таблицу распределения. Поэтому непрерывные случайные величины изучают другим способом, который мы сейчас рассмотрим. Пусть X — непрерывная случайная величина с возможными значениями из некоторого интервала $(a; b)$ и x — действительное число. Под выражением $X < x$ понимается событие «случайная величина X приняла значение, меньшее x». Вероятность этого события $P(X < x)$ есть некоторая функция переменной x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Определение. *Интегральной функцией распределения* (или кратко *функцией распределения*) непрерывной случайной величины

X называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что X приняла значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x). \qquad (9.4)$$

Отметим, что функция распределения совершенно также определяется для дискретных случайных величин.

Укажем свойства, которыми обладает функция $F(x)$.

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Это свойство следует из того, что $F(x)$ есть вероятность.

2. *$F(x)$ — неубывающая функция, т. е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.*

Доказательство. Предположим, что $x_1 < x_2$. Событие «X примет значение, меньшее x_2» можно представить в виде суммы двух несовместимых событий: «X примет значение, меньшее x_1» и «X примет значение, удовлетворяющее неравенствам $x_1 \le X < x_2$». Обозначим вероятности последних двух событий соответственно через $P(X < x_1)$ и $P(x_1 \le X < x_2)$. По теореме о вероятности суммы двух несовместимых событий

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2),$$

откуда с учетом (9.4)

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \qquad (9.5)$$

Так как вероятность любого события есть число неотрицательное, то $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$ и, значит,

$$F(x_2) \ge F(x_1).$$

Формула (9.5) утверждает свойство 3.

3. ***Вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал $[a; b)$ равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах интервала $(a; b)$:***

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \qquad (9.6)$$

Пример 9.9. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1; \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4} & \text{при } -1 < x \le 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найдем вероятности того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[0; 2)$.

Решение. Так как на полуинтервале $[0; 2)$ $F(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}$, то

$$P(0 \le X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

В дальнейшем случайную величину X будем называть *непрерывной*, если непрерывна ее функция распределения $F(x)$ с непрерывной или кусочно-непрерывной производной.

4. ***Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет какое-либо заранее заданное значение, равна нулю:***

$$P(X = x_1) = 0. \tag{9.7}$$

Доказательство. Положив в (9.5) $x_2 = x_1 + \Delta x$, будем иметь

$$P(x_1 \le X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1). \tag{9.8}$$

Так как $F(x)$ — непрерывная функция, то, перейдя в (9.8) к пределу при $\Delta x \to 0$, получим искомое равенство (9.7). Из свойства 4 следует свойство 5.

5. ***Вероятности попадания непрерывной случайной величины в интервал, сегмент и полуинтервал с одними и теми же концами одинаковы***

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b). \tag{9.9}$$

6. ***Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;\ b)$, то 1) $F(x) = 0$ при $x \le a$; 2) $F(x) = 1$ при $x \ge b$.***

Доказательство. 1) Пусть $x_1 \le a$. Тогда событие $X < x_1$ невозможно, и, следовательно, вероятность его равна нулю.

2) Пусть $x_2 \ge b$. Тогда событие $X < x_2$ достоверно, и, следовательно, вероятность его равна 1.

Следствие. *Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей числовой оси, то справедливы следующие предельные соотношения*:

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0; \quad F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

2. Дифференциальная функция распределения. *Дифференциальной функцией распределения* непрерывной случайной величины X (или ее *плотностью вероятности*) называется функция $f(x)$, равная производной интегральной функции:

$$f(x) = F'(x).$$

Так как $F(x)$ — неубывающая функция, то $f(x) \ge 0$ (см. подразд. 3.7, п. 1).

Теорема 9.3. *Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал $(a;\ b)$ равна определенному интегралу от дифференциальной функции распределения величины X, взятому в пределах от a до b*:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{9.10}$$

Доказательство. Так как $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то на основании формулы Ньютона—Лейбница (см. подразд. 4.4, п. 2)

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{9.11}$$

Теперь с учетом соотношений (9.6), (9.9), (9.11) получим искомое равенство.

Из (9.10) следует, что геометрически (см. подразд. 4.3, п. 2) вероятность $P(a < X < b)$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности вероятности $y = f(x)$ и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$ и $x = b$.

Следствие. *В частности, если $f(x)$ — четная функция и концы интервала симметричны относительно начала координат, то*

$$P(-a < X < a) = P(|X| \le a) = 2\int_0^a f(x)dx. \tag{9.12}$$

Заменяя в формуле (9.11) a на $-\infty$ и b на x, получаем

$$F(x) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

откуда, в силу найденного выше следствия (см. п. 1),

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{9.13}$$

Формула (9.13) дает возможность отыскать интегральную функцию распределения $F(x)$ по ее плотности вероятности.

Отметим, что из формулы (9.13) и из только что отмеченного следствия вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{9.14}$$

Пример 9.10. Задана плотность вероятности случайной величины X

$$f(x) = \frac{A}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Требуется найти коэффициент A, функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания случайной величины X в интервал (0; 1).

Решение. Коэффициент A найдем, воспользовавшись соотношением (9.14). Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Adx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{Adx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{Adx}{1+x^2} =$$

$$= A\operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{0} + A\operatorname{arctg} x\Big|_{0}^{+\infty} = A[\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty)] = A\pi,$$

то $A\pi = 1$, откуда $A = \dfrac{1}{\pi}$.

Применяя формулу (9.13), получаем функцию распределения $F(x)$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{\pi}[\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}(-\infty)]=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x.$$

Наконец, формулы (9.6) и (9.9) с учетом найденной функции $F(x)$ дают

$$P(0<X<1)=F(1)-F(0)=\frac{1}{4}.$$

3. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

Определение 1. *Математическим ожиданием непрерывной случайной величины* X с плотностью вероятности $f(x)$ называют величину несобственного интеграла (если он сходится):

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx.$$

Определение 2. *Дисперсией непрерывной случайной величины* X, математическое ожидание которой $M(X) = a$ и функция $f(x)$ является ее плотностью вероятности, называется величина несобственного интеграла (если он сходится):

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)dx.$$

Можно показать, что математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины имеют те же свойства, что и математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.

Для непрерывной случайной величины X среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ определяется, как и для дискретной величины, формулой $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Пример 9.11. Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \dfrac{x}{2} & \text{при } 0\le x\le 2,\\ 0 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Определим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X.

Решение. Согласно определениям математического ожидания непрерывной случайной величины и дисперсии непрерывной случайной величины имеем

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x^2dx=\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=\frac{4}{3},$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{16}{9}x\right)dx=\frac{2}{9}$$

и, наконец,

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{2}}{3}\approx 0,47.$$

9.5. Некоторые законы распределения случайных величин

1. Биномиальное распределение. Пусть производится n испытаний, причем вероятность появления события A в каждом испытании равна p и не зависит от исхода других испытаний (независимые испытания). Так как вероятность наступления события A в одном испытании равна p, то вероятность его ненаступления равна $q = 1 - p$.

Найдем вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит m раз ($m \le n$).

Пусть событие A наступило в первых m испытаниях m раз и не наступило во всех последующих испытаниях. Это сложное событие можно записать в виде произведения:

$$\underbrace{AA\ldots A}_{m\ \text{раз}}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m\ \text{раз}}.$$

Общее число сложных событий, в которых событие A наступает m раз, равно числу сочетаний из n элементов по m элементов. При этом вероятность каждого сложного события равна: $p^m q^{n-m}$. Так как эти сложные события являются несовместимыми, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей. Итак, если $P_n(m)$ есть вероятность появления события A m раз в n испытаниях, то

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

или

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \tag{9.15}$$

Формулу (9.15) называют *формулой Бернулли*.

Пример 9.12. Пусть всхожесть семян данного растения составляет 90 %. Найдем вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

Р е ш е н и е. а) В данном случае $n = 4$, $m = 3$, $p = 0{,}9$, $q = 1 - p = 0{,}1$. Применим формулу Бернулли (9.15):

$$P_4(3) = \frac{4!}{3!1!}(0{,}9)^3\ \ 0{,}1\quad 0{,}2916.$$

б) Искомое событие A состоит в том, что из четырех семян взойдут или три, или четыре. По теореме сложения вероятностей $P(A) = P_4(3) + P_4(4)$. Но $P_4(4) = (0{,}9)^4 = 0{,}6561$. Поэтому $P(A) = 0{,}2916 + 0{,}6561 = 0{,}9477$.

Снова рассмотрим n независимых испытаний, в каждом из которых наступает событие A с вероятностью p. Обозначим через X случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях.

Понятно, что событие A может вообще не наступить, наступить один раз, два раза и т.д. и, наконец, наступить n раз. Следовательно, возможными значениями величины X будут числа 0, 1, 2, ..., $n-1$, n. По формуле Бернулли можно найти вероятности этих значений:

$$P_n(0) = C_n^0 q^n = q^n,$$

$$P_n(1) = C_n^1 q^{n-1} p,$$

....

$$P_n(n) = p^n.$$

Запишем полученные данные в виде таблицы распределения:

X	0	1	...	m	...	n
p	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Построенный закон распределения дискретной случайной величины X называют *законом биномиального распределения.*

Найдем $M(X)$. Очевидно, что X_i — число появлений события A в каждом испытании — представляет собой случайную величину со следующим распределением:

X_i	0	1
p_i	q	p

Поэтому $M(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$. Но так как $X = X_1 + \ldots + X_n$, то $M(X) = np$.

Найдем далее $D(X)$ и $\sigma(X)$. Так как величина X_i^2 имеет распределение

X_i^2	0^2	1^2
p_i	q	p

то $M(X_i^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$. Поэтому

$$D(X_i) = M(X_i^2) - M^2(X_i) = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Наконец, в силу независимости величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$,

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n) = npq.$$

Отсюда

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

Пример 9.13. Случайная величина X определена как число выпавших гербов в результате 100 бросаний монеты. Вычислим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X.

Решение. Вероятность появления герба при каждом бросании монеты $p=\frac{1}{2}$. Следовательно, вероятность непоявления герба $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Случайная величина X имеет биномиальное распределение при $n = 100$ и $p=\frac{1}{2}$. Поэтому $M(X)=np=100\cdot\frac{1}{2}=50$; $D(X)=npq=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=25$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{25}=5$.

Пример 9.14. Допустим, что для хищника вероятность поимки отдельной жертвы составляет 0,4 при каждом столкновении с жертвой. Каково ожидаемое число пойманных жертв в 20 столкновениях?

Решение. Это пример биномиального распределения при $n = 20$ и $p = 0{,}4$. Ожидаемое число есть $M(X) = np = 20\cdot 0{,}4 = 8$.

2. Локальная и интегральная предельные теоремы Лапласа.

Если число испытаний n велико, то вычисления по формуле Бернулли становятся затруднительными. Лаплас получил важную приближенную формулу для вероятности $P_n(m)$ появления события A точно m раз, если n достаточно большое число. Им же получена приближенная формула и для суммы вида $\sum_{m=k}^{l} P_n(m)$.

Локальная предельная теорема Лапласа (доказательство см. в [4]). *Пусть $p = P(A)$ — вероятность события A, причем $0 < p < 1$. Тогда вероятность того, что в условиях схемы Бернулли событие A при n испытаниях появится точно m раз, выражается приближенной формулой Лапласа*

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{9.16}$$

где $q = 1 - p$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Для функции $\varphi(x)$ имеется таблица (см. приложение 1) ее значений для положительных значений x (функция $\varphi(x)$ четная).

Пример 9.15. Вероятность поражения цели стрелком при одиночном выстреле равна $p = 0{,}2$. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах цель будет поражена ровно 20 раз?

Решение. Здесь $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $n = 100$ и $m = 20$. Отсюда $\sqrt{npq} = \sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}=4$ и, следовательно, $t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{20-100\cdot 0{,}2}{4}=0$. Учитывая, что $\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0{,}40$, из формулы (9.16) получаем $P_{100}(20)\approx 0{,}40\cdot\frac{1}{4}=0{,}10$ (для получения приближенного равенства $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0{,}40$ можно использовать калькулятор).

Перейдем к интегральной предельной теореме Лапласа. Поставим следующий вопрос, какова вероятность того, что в условиях схемы Бернулли событие A, имеющее вероятность $P(A) = p$ $(0 < p < 1)$, при *n* испытаниях (как и прежде число испытаний велико) появится не менее k раз и не более l раз. Эту искомую вероятность обозначим через $P_n(k, l)$.

Справедлива следующая приближенная формула

$$P_n(k,l) \approx \int_{x_k}^{x_l} \varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_k}^{x_l} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \tag{9.17}$$

где

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_l = \frac{l - np}{\sqrt{npq}}. \tag{9.18}$$

Это составляет содержание *интегральной предельной теоремы Лапласа.*

Введем функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{9.19}$$

называемую *функцией Лапласа*, или *интегралом вероятностей.* Очевидно, $\Phi(x)$ есть первообразная для функции $\varphi(x)$. Так как $\varphi(x) > 0$ в $(-\infty, +\infty)$, то $\Phi(x)$ — возрастающая функция в этом интервале (см. подразд. 3.7, п. 1, теорема 3.4). На основании формулы Ньютона—Лейбница (см. подразд. 4.4, п. 2) из формулы (9.17)

$$P_n(k,l) \approx \Phi(x_l) - \Phi(x_k). \tag{9.20}$$

Это — *интегральная формула Лапласа*[1].

Как известно (см. подразд. 4.5, примечание), интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ не берется в элементарных функциях. Поэтому для функции (9.19) составлена таблица (см. приложение 2) ее значений для положительных значений x, так как $\Phi(0) = 0$ и функция $\Phi(x)$ нечетная,

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad \Phi(x)\ (t \qquad z, dt \qquad dz).$$

Пример 9.16. Вероятность того, что изделие не прошло проверку ОТК, равно 0,2. Найдем вероятность того, что среди 400 случайно отобранных изделий окажутся непроверенными от 70 до 100 изделий.

Решение. Здесь $n = 400$, $k = 70$, $l = 100$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, поэтому в силу равенств (9.18) $x_k = -1{,}25$, $x_l = 2{,}5$ и согласно формуле (9.20) имеем

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

3. Распределение Пуассона. Пусть производится серия n независимых испытаний ($n = 1, 2, 3, \ldots$), причем вероятность появления данного события A в этой серии $P(A) = p_n > 0$ зависит от ее номера n и стремится к нулю при $n \to \infty$ (последовательность *«редких собы-*

---

[1] Пьер Лаплас (1749—1827) — французский математик и астроном.

тий»). Предположим, что для каждой серии среднее значение числа появлений события A постоянно, т.е. $np_n = \mu = \text{const}$.

Отсюда $p_n = \dfrac{\mu}{n}$.

Исходя из формулы Бернулли (9.15), для вероятности появления события A в n-й серии ровно m раз имеем выражение

$$P_n(m) = C_n^m p_n^m (1 - p_n)^{n-m} = C_n^m \left(\frac{\mu}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-m}.$$

Пусть m фиксировано. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m \left(\frac{\mu}{n}\right)^m = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1))}{m!\,n^m}\mu^m =$$

$$= \frac{\mu^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left(1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right) = \frac{\mu^m}{m!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m} = e^{-\mu}$$

(здесь использован второй замечательный предел; см. подразд. 2.5).

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}.$$

Если n велико, то в силу определения предела (см. подразд. 2.5) вероятность $P_n(m)$ сколь угодно мало отличается от $\dfrac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}$. Отсюда при больших n для искомой вероятности $P_n(m)$ имеем приближенную формулу Пуассона (для простоты знак приближенного равенства опущен)

$$P_n(m) = \frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}, \text{ где } \mu = np_n.$$

Определение. Говорят, что случайная величина X распределена по *закону Пуассона*, если эта величина задана таблицей:

X	0	1	2	3	...
p	$e^{-\mu}$	$\mu e^{-\mu}$	$\dfrac{\mu^2}{2!}e^{-\mu}$	$\dfrac{\mu^3}{3!}e^{-\mu}$	...

Здесь μ — фиксированное положительное число (разным значениям μ отвечают разные распределения Пуассона).

Найдем математическое ожидание дискретной величины X, распределенной по закону Пуассона. Согласно определению математического ожидания (см. подразд. 9.2, п. 2, примечание 2)

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \mu e^{-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} = \mu e^{-\mu} e^{\mu} = \mu.$$

Найдем далее $D(X)$. Сначала найдем $M(X^2)$:

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \mu e^{-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \mu e^{-\mu} \left(\mu \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!} + e^{\mu} \right) = \mu e^{-\mu} \left(\mu e^{\mu} + e^{\mu} \right) = \mu^2 + \mu.$$

Теперь по известной формуле (см. подразд. 9.3, п. 2)

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu.$$

Распределение Пуассона крайне важно во многих физических и биологических задачах. Оно представляет собой грубую модель частоты встречаемости катастрофических наводнений при довольно длительном периоде наблюдений. Распределение микроэлементов в образце почвы может также приближаться к пуассоновскому.

4. Равномерное распределение. Распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, принимающей все свои значения из отрезка $[a; b]$, называется ***равномерным***, если ее плотность вероятности на этом отрезке постоянна, а вне его равна нулю, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < a, \\ c \text{ при } a \le x \le b, \\ 0 \text{ при } x > b. \end{cases}$$

Отсюда (см. подразд. 9.4, п. 1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b c\,dx = c(b - a). \qquad (9.21)$$

Но, как известно (см. подразд. 9.4, п. 2),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Из сравнения этого равенства с (9.21) получаем $c = \dfrac{1}{b-a}$.

Итак, плотность вероятности непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно на отрезке $[a; b]$, имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a \le x \le b, \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Покажем, что $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$ и $D(X) = \dfrac{1}{12}(a - b)^2$.

Действительно,

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b=\frac{a+b}{2}.$$

Далее

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x\quad\frac{a+b}{2}\right)^2 f(x)dx=\frac{1}{3(b-a)}\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\bigg|_a^b=$$

$$=\frac{1}{3(b-a)}\left(\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3\right)=\frac{1}{3(b-a)}\left(\frac{(b-a)^3}{8}-\frac{(a-b)^3}{8}\right)=$$

$$=\frac{1}{3(b-a)}\cdot\frac{2(b-a)^3}{8}=\frac{1}{12}(a\quad b)^2.-$$

Пример 9.17. На отрезке [a; b] наугад указывают точку. Какова вероятность того, что эта точка окажется в левой половине отрезка?

Решение. Пусть X — случайная величина, равная координате выбранной точки. X распределена равномерно (в этом и состоит точный смысл слов: «наугад указывают точку»), а так как середина отрезка [a; b] имеет координату $\frac{a+b}{2}$, то искомая вероятность равна (см. подразд. 9.4, п. 2)

$$P\left(a<X<\frac{a+b}{2}\right)=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)=\frac{1}{2}.$$

Впрочем, этот результат был ясен с самого начала.

5. Закон нормального распределения. Центральная предельная теорема. Закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется *нормальным*, если ее дифференциальная функция $f(x)$ определяется формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\qquad(9.22)$$

где параметр a совпадает с математическим ожиданием величины X: $a = M(X)$, параметр σ является средним квадратическим отклонением величины X: $\sigma = \sigma(X)$.

В подразд. 3.8 (пример 3.47) было рассмотрено построение графика функции $y = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса). С учетом графика этой функции график функции (9.22) будет иметь вид, как на рис. 9.1. Причем его максимальная ордината равна $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Значит, эта ордината убывает с возрастанием значения σ (кривая «сжимается»

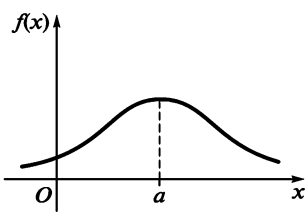


Рис. 9.1

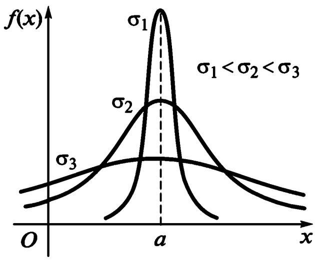


Рис. 9.2

к оси Ox) и возрастает с убыванием значения σ (кривая «растягивается» в положительном направлении оси Oy), что отражено на рис. 9.2. Изменение значений параметра a (при неизменном значении σ) не влияет на форму кривой.

Нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $a = 1$ называют *нормированным*. Дифференциальная функция в случае такого распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha; \beta)$, согласно известной теореме (см. п. 2),

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Сделаем в этом интеграле замену переменной, полагая $\frac{x-a}{\sigma} = t$. Тогда $x = a + \sigma t$, $dx = \sigma\, dt$ и

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (9.23)$$

Используя функцию (9.19), получаем

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Итак,

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (9.24)$$

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, т.е. найти $P(|X-a| < \delta)$. Используя формулу (9.24) и нечетность функции $\Phi(x)$, имеем

$$P(|X-a| < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

т. е.

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (9.25)$$

Пример 9.18. Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 20$ и $\sigma = 10$. Найдем $P(|X-20|<3)$.

Решение. Используя формулу (9.25), имеем

$$P(|X-20|<3)=2\Phi\left(\frac{3}{10}\right).$$

По таблице приложения 2 находим, что $\Phi(0,3) = 0,1179$, поэтому $P(|X-20|<3) = 0,2358$.

Нормальное распределение вероятностей имеет в теории вероятностей большое значение. Нормальному закону подчиняется вероятность при стрельбе по цели, в измерениях и т. п. В частности, оказывается, что закон распределения суммы достаточно большого числа независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, близок к нормальному распределению. Этот факт, называемый *центральной предельной теоремой*, был доказан выдающимся русским математиком А. М. Ляпуновым (1857—1918).

6. Распределение случайных ошибок измерения. Пусть производится измерение некоторой величины. Разность $x - a$ между результатом измерения x и истинным значением a измеряемой величины называется *ошибкой* измерения. Вследствие воздействия на измерение большого числа факторов, которые невозможно учесть (случайные изменения температуры, колебание прибора, ошибки, возникающие при округлении, и т. п.), ошибку измерения можно считать суммой большого числа независимых случайных величин, которая по центральной предельной теореме должна быть распределена нормально. Если при этом нет систематически действующих факторов (например, неисправности приборов, завышающих при каждом измерении показания приборов), приводящих к систематическим ошибкам, то математическое ожидание случайных ошибок равно нулю.

Итак, принимается положение: при отсутствии систематически действующих факторов ошибка измерения есть случайная величина (обозначим ее через T), распределенная нормально, причем ее математическое ожидание равно нулю, т. е. плотность вероятности величины T равна

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}},$$

где σ — среднеквадратическое отклонение величины T, характеризующее разброс результатов измерения вокруг измеряемой величины.

В силу предыдущего результат измерения есть также случайная величина (обозначим ее через X), связанная с T зависимостью

$X = a + T$. Отсюда: $M(X) = a$, $\sigma(X) = \sigma(T) = \sigma$ и X имеет нормальный закон распределения.

Заметим, что случайная ошибка измерения, как и результаты измерения, всегда выражаются в некоторых целых единицах, связанных с шагом шкалы измерительного прибора; в теории удобнее считать случайную ошибку непрерывной случайной величиной, что упрощает расчеты.

При измерении возможны две ситуации:

а) известно σ (это характеристика прибора и комплекса условий, при которых производятся наблюдения), требуется по результатам измерений оценить a;

б) σ неизвестно, требуется по результатам измерений оценить a и σ.

Эти очень важные задачи будут обсуждаться в подразд. 10.3.

9.6. Закон больших чисел

1. Неравенство Чебышёва[1].

Лемма. *Пусть X — случайная величина, принимающая только неотрицательные значения. Тогда*

$$P(X \geq 1) \leq M(X). \tag{9.26}$$

Доказательство. Для простоты докажем это утверждение для дискретной случайной величины X, принимающей значения x_1, x_2, ..., x_n, при условии $x_i \geq 0$. По теореме сложения вероятностей для несовместимых событий (см. подразд. 8.2, п. 1)

$$P(X \geq 1) = \sum_{x_i \geq 1} P(X = x_i),$$

где суммирование распространено на все значения x_i, большие единицы или равные ей. Но для $x_i \geq 1$, очевидно,

$$P(X = x_i) \leq x_i P(X = x_i).$$

Поэтому

$$P(X \geq 1) = \sum_{x_i \geq 1} P(X = x_i) \leq \sum_{x_i \geq 1} x_i P(X = x_i). \tag{9.27}$$

Добавим к правой части неравенства (9.27) сумму $\sum_{x_i < 1} x_i P(X = x_i)$, где $x_i < 1$. Эта сумма неотрицательна, так как $x_i \geq 0$ по условию, а вероятность $P(X = x_i) \geq 0$. Поэтому

$$\sum_{x_i \geq 1} x_i P(X = x_i) \leq \sum_{x_i \geq 1} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i < 1} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i). \tag{9.28}$$

[1] П.Л. Чебышёв (1821—1894) — выдающийся русский математик.

Последняя сумма распространена на все значения x_i, принимаемые случайной величиной X. Следовательно (см. подразд. 9.2, п. 1),

$$\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = M(X).$$

Отсюда, сопоставляя соотношения (9.27) и (9.28), имеем искомое неравенство (9.26).

Теорема 9.4. *Для любой случайной величины X при каждом положительном числе ε имеет место неравенство*

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (9.29)$$

Неравенство (9.29) ***называют неравенством Чебышёва.***

Доказательство. Так как событие $|X - M(X)| \geq \varepsilon$ равносильно событию

$$\frac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2} \geq 1,$$

то

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = P\left(\frac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right).$$

Случайная величина $\dfrac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2}$ неотрицательна, и, значит, согласно лемме, свойству 2 математического ожидания (см. подразд. 9.2, п. 2) и определению дисперсии (см. подразд. 9.3, п. 1)

$$P\left(\frac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right) \leq M\left(\frac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2} M((X - M(X))^2) = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Поэтому

$$P\big(|X - M(X)| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Пример 9.19. Пусть случайная величина X имеет $D(X) = 0{,}001$. Какова вероятность того, что X отличается от $M(X)$ более чем на 0,1?

Решение. По неравенству Чебышёва

$$P(|X - M(X)| \geq 0{,}1) \leq \frac{D(X)}{0{,}1^2} = \frac{0{,}001}{0{,}01} = 0{,}1.$$

Примечание. Отметим другую форму неравенства Чебышёва. Так как событие, выражаемое неравенством $|X - M(X)| < \varepsilon$, противоположно событию, выражаемому неравенством $|X - M(X)| \geq \varepsilon$, то (см. подразд. 8.2, п.1, следствие)

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) + P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = 1.$$

Отсюда с учетом неравенства (9.29) получаем другую форму неравенства Чебышёва:

$$P\big(|X - M(X)| < \varepsilon\big) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (9.30)$$

2. Закон больших чисел Чебышёва. Докажем закон больших чисел в широкой и удобной для практики форме, полученной П.Л. Чебышёвым.

Теорема (теорема Чебышёва; закон больших чисел). *Если дисперсии независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ограничены одной и той же постоянной C, $D(X_i) \leq C$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, вероятность выполнения неравенства $|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon$,* где $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$, *будет сколь угодно близка к единице, если число случайных величин n достаточно велико, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon\big) = 1. \qquad (9.31)$$

Доказательство. Применяя неравенство Чебышёва в форме (9.30) к величине $\bar{X}$, имеем

$$P\big(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon\big) \geq 1 - \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2}. \qquad (9.32)$$

Пользуясь свойствами дисперсии (см. подразд. 9.3, п. 3) и условием теоремы, получаем

$$D(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\big(D(X_1) + \ldots + D(X_n)\big) \leq \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Отсюда с учетом неравенства (9.32) и того, что вероятность любого события не превосходит единицы (см. подразд. 8.1, п. 2), получим

$$1 \geq P\big(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon\big) \geq 1 - \frac{C}{\varepsilon^2 n}. \qquad (9.33)$$

Наконец, переходя в неравенстве (9.33) к пределу при $n \to \infty$, приходим к искомому соотношению (9.31).

Частный случай теоремы Чебышёва. *Если все X_k имеют одинаковые математические ожидания $M(X_1) = \ldots = M(X_n) = a$* и $D(X_k) < C$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), то

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|\bar{X} - a| < \varepsilon\big) = 1. \qquad (9.34)$$

Действительно, в условиях рассматриваемого частного случая равенство (9.31) имеет вид (9.34).

Сущность теоремы Чебышёва состоит в следующем. Несмотря на то что каждая из независимых случайных величин X_k может принять значение, далекое от математического ожидания $M(X_k)$, среднее арифметическое $\bar{X}$ достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью весьма близко к среднему арифметическому их математических ожиданий.

Теорема Чебышёва имеет большое практическое значение. Пусть, например, измеряется некоторая физическая величина. Обычно принимают в качестве искомого значения измеряемой величины среднее арифметическое результатов нескольких измерений. Можно ли считать такой подход верным? Теорема Чебышёва (ее частный случай) отвечает на этот вопрос положительно.

На теореме Чебышёва основан широко применяемый в статистике выборочный метод, согласно которому по сравнительно небольшой случайной выборке выносят суждение, касающееся всей совокупности исследуемых объектов.

Из теоремы Чебышёва (частный случай) следует теорема, называемая теоремой Бернулли, являющаяся простейшей формой закона больших чисел.

Теорема Бернулли. *Пусть m — число наступлений события A в n независимых испытаниях и p есть вероятность наступления события A в каждом из испытаний. Тогда, каково бы ни было положительное число* ε,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|< \quad\right)=1. \tag{9.35}$$

Доказательство. Обозначим через X_k случайную величину, равную числу наступлений события A в k-м испытании, где $k = 1, 2, ..., n$. Тогда имеем (см. подразд. 9.5, п. 1)

$$m = X_1 + X_2 + ... + X_n;$$

$$M(X_k) = p,\ D(X_k) \quad pq = \frac{1}{4} \quad \le$$

и все условия частного случая теоремы Чебышёва выполнены. Равенство (9.34) превращается в равенство (9.35).

Практический смысл теоремы Бернулли следующий: при постоянстве вероятности случайного события A во всех испытаниях, при неограниченном возрастании числа испытаний можно с вероятностью, как угодно близкой к единице (т.е. как угодно близкой к достоверности), утверждать, что наблюдаемая относительная частота случайного события будет как угодно мало отклоняться от его вероятности.

Выполните задания

1. Пусть случайная величина X — число очков, выпавших при подбрасывании игральной кости. Найдите закон распределения случайной величины X.

2. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается 1 выигрыш в 5 000 р. и 10 выигрышей по 100 р. Найдите закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета.

3. Закон распределения случайной величины X задан таблицей

X	1	2	3
p	0,3	0,2	0,5

Найдите математическое ожидание X.

4. Найдите математическое ожидание выигрыша X в упражнении 2.

5. Найдите математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	2	3	5
p	0,3	0,1	0,6

6. Производятся два выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}3$. Найдите математическое ожидание общего числа попаданий.

7. Найдите математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

8. Найдите математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

9. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	2	4	5
p	0,1	0,3	0,6

и

Y	7	9
p	0,8	0,2

Найдите математическое ожидание случайной величины XY.

10. Найдите дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

11. Известны дисперсии двух независимых случайных величин X, Y: $D(X) = 4$, $D(Y) = 3$. Найдите дисперсию суммы этих величин.

12. Дисперсия случайной величины X равна 5. Найдите дисперсию следующих величин: а) $X - 1$; б) $-2X$; в) $3X + 6$.

Найдите математические ожидания и дисперсии случайных величин.

13.

X	−2	−1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

14.

X	1	3	4	6	7
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

15.

X	5	7	10	15
p	0,2	0,5	0,2	0,1

16. К случайной величине прибавили постоянную a. Как при этом изменятся: а) ее математическое ожидание; б) дисперсия?

17. Случайную величину умножили на a. Как при этом изменятся: а) математическое ожидание; б) дисперсия?

18. Случайная величина X принимает только два значения: 1 и –1. Каждое с вероятностью 0,5. Найдите дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

19. Дисперсия случайной величины $D(X) = 6{,}25$. Найдите среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

20. Пусть закон распределения случайной величины X задан таблицей:

X	4	10	20
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Определите математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

21. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	3	5
p	0,2	0,8

Найдите начальные моменты первого и второго порядков.

22. Дискретная случайная величина X задана законом распределения, приведенным в предыдущем примере. Найдите центральный момент второго порядка.

23. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1, \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3} & \text{при } -1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (0; 1).

24. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 2, \\ \dfrac{x}{2}-1 & \text{при } 2<x\le 4, \\ 1 & \text{при } x>4. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (2; 3).

25. Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \dfrac{3}{32}(4x-x^2) & \text{при } 0\le x\le 4, \\ 0 & \text{при } x>4. \end{cases}$$

Найдите вероятность попадания случайной величины X на отрезок [–2; 3].

26. Плотность вероятности случайной величины X задана формулой

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty<x<+\infty).$$

Найдите вероятность того, что величина X попадает на интервал (–1; 1).

27. Случайная величина задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ a\cos x & \text{при } -\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите коэффициент a.

28. Дана плотность вероятности непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0, \\ \cos x & \text{при } 0<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите интегральную функцию распределения $F(x)$.

29. Дана плотность вероятности непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0, \\ \sin x & \text{при } 0<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите интегральную функцию распределения $F(x)$.

30. Функция

$$f(x)=\frac{2A}{e^x+e^{-x}}\ (-\infty<x<+\infty)$$

является плотностью вероятности случайной величины X. Найдите коэффициент A и функцию распределения $F(x)$.

31. Найдите математическое ожидание случайной величины X, заданной плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{1}{4} & \text{при } 0<x\le 4,\\ 0 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

32. Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 1 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 0 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

33. В хлопке 75 % длинных волокон. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу трех волокон окажутся два длинных волокна?

34. При некоторых условиях стрельбы вероятность попадания в цель равна $\frac{1}{3}$. Производится 6 выстрелов. Какова вероятность ровно двух попаданий?

35. Игральная кость бросается 5 раз. Найдите вероятность того, что два раза появится число очков, кратное трем.

36. Монета подбрасывается 5 раз. Какова вероятность того, что герб появится не менее двух раз?

37. Пусть всхожесть семян данного растения составляет 80 %. Найдите вероятность того, что из 3 посеянных семян взойдут: а) два; б) не менее двух.

38. В семье 5 детей. Найдите вероятность того, что среди этих детей два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

39. По мишени производится 3 выстрела, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Рассматривается случайная величина X — число попаданий в мишень. Найдите закон ее распределения.

40. Принимая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найдите вероятность того, что среди четырех новорожденных два мальчика.

41. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия p = 0,6. Найдите математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

42. Найдите математическое ожидание числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

43. Найдите дисперсию случайной величины X — числа появлений события A в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события A равна 0,7.

44. Найдите а) математическое ожидание и б) дисперсию числа бракованных изделий в партии из 5 000 изделий, если каждое изделие может оказаться бракованным с вероятностью 0,02.

45. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,6. Найдите дисперсию случайной величины X — числа появлений события A в этих испытаниях.

46. Найдите дисперсию случайной величины X — числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если $M(X) = 0{,}8$.

47. Рост взрослой женщины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами: $a = 164$ см, $\sigma = 5{,}5$ см. Найдите плотность вероятности.

48. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 0 и 2. Найдите вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(-2; 3)$.

49. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 6 и 2. Найдите вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(4; 8)$.

50. Пусть масса пойманной рыбы подчиняется нормальному закону с параметрами $a = 375$ г, $\sigma = 25$ г. Найдите вероятность того, что масса пойманной рыбы будет от 300 до 425 г.

51. Диаметр детали, изготовленной цехом, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Дисперсия ее равна 0,0001, а математическое ожидание –2,5 см. Найдите границы, в которых с вероятностью 0,9973 заключен диаметр наудачу взятой детали.

52. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Среднее квадратическое отклонение этой величины равно 0,4. Найдите вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 0,3.

53. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Среднее квадратическое отклонение этой величины равно 2.

Найдите вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 0,1.

54. Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием 30 и дисперсией 100. Найдите вероятность того, что значение случайной величины заключено в интервале $(10; 50)$.

55. Найдите дисперсию случайной величины X, заданной таблицей распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Глава 10

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

10.1. Генеральная совокупность и выборка

Мы приступаем к изучению элементов математической статистики, в которой разрабатываются научно обоснованные методы сбора статистических данных и их обработки.

1. Генеральная совокупность и выборка. Пусть требуется изучить множество однородных объектов (это множество называется *статистической совокупностью*) относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным — контролируемый размер детали.

Лучше всего произвести сплошное обследование, т.е. изучить каждый объект. Однако в большинстве случаев по разным причинам это сделать невозможно. Препятствовать сплошному обследованию может большое число объектов, недоступность их. Если, например, нужно знать среднюю глубину воронки при взрыве снаряда из опытной партии, то, производя сплошное обследование, мы уничтожим всю партию.

Если сплошное обследование невозможно, то из всей совокупности выбирают для изучения часть объектов.

Статистическая совокупность, из которой отбирают часть объектов, называется *генеральной совокупностью*. Множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности, называют *выборкой*.

Число объектов генеральной совокупности и выборки называют соответственно *объемом* генеральной совокупности и *объемом* выборки.

Пример 10.1. Плоды одного дерева (200 шт.) обследуют на наличие специфического для данного сорта вкуса. Для этого отбирают 10 шт. Здесь 200 — объем генеральной совокупности, а 10 — объем выборки.

Если выборку отбирают по одному объекту, который обследуют и снова возвращают в генеральную совокупность, то выборка называется *повторной*. Если объекты выборки уже не возвращаются в генеральную совокупность, то выборка называется *бесповторной*.

На практике чаще используется бесповторная выборка. Если объем выборки составляет небольшую долю объема генеральной совокупности, то разница между повторной и бесповторной выборками незначительна.

Свойства объектов выборки должны правильно отражать свойства объектов генеральной совокупности, или, как говорят, выборка должна быть *репрезентативной* (представительной). Считается, что выборка репрезентативна, если все объекты генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность попасть в выборку, т.е. выбор производится случайно. Например, для того чтобы оценить будущий урожай, можно сделать выборку из генеральной совокупности еще не созревших плодов и исследовать их характеристики (массу, качество и пр.). Если вся выборка будет сделана с одного дерева, то она не будет репрезентативной. Репрезентативная выборка должна состоять из случайно выбранных плодов со случайно выбранных деревьев.

2. Статистическое распределение выборки. Полигон. Гистограмма. Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 — n_2 раз, ..., x_k — n_k раз и $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ — объем выборки. Наблюдаемые значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанная в возрастающем порядке, — *вариационным рядом*. Числа наблюдений $n_1, n_2, \ldots, n_k$ называют *частотами*, а их отношения к объему выборки $\frac{n_1}{n} = p_1^*$, $\frac{n_2}{n}$ $p_2^*, \ldots, \frac{n_k}{n} = p_k^*$ — *относительными частотами*. Отметим, что сумма относительных частот равна единице: $p_1^* + p_2^* + \ldots + p_k^* = 1$.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (непрерывное распределение). В качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал. Для графического изображения статистического распределения используют *полигоны* и *гистограммы*.

Для построения полигона на оси Ox откладывают значения вариант x_i, на оси Oy — значения частот n_i (относительных частот p_i^*).

Пример 10.2. На рис. 10.1 показан полигон следующего распределения

Варианта x_i	1	2	3	5
Относительная частота p_i^*	0,4	0,2	0,3	0,1

Полигоном обычно пользуются в случае небольшого числа вариант. В случае большого числа вариант и в случае непрерывного распределения признака чаще строят гистограммы. Для этого интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разби-

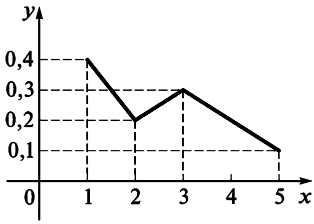


Рис. 10.1

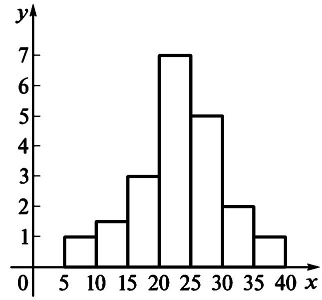


Рис. 10.2

вают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i — сумму частот вариант, попавших в i-интервал. Затем на этих интервалах, как на основаниях, строят прямоугольники с высотами $\frac{n_i}{h}$ (или $\frac{n_i}{nh}$, где n — объем выборки). Площадь i частичного прямоугольника равна $\frac{hn_i}{h} = n_i$ (или $\frac{hn_i}{nh} = \frac{n_i}{n} \quad p_i^*$). Следовательно, площадь гистограммы равна сумме всех частот (или относительных частот), т.е. объему выборки (или единице).

Пример 10.3. На рис. 10.2 показана гистограмма непрерывного распределения объема $n = 100$, приведенного в следующей таблице:

Частичный интервал h	Сумма частот вариант частичного интервала n_i	$\frac{n_i}{h}$
5—10	4	0,8
10—15	6	1,2
15—20	16	3,2
20—25	36	7,2
25—30	24	4,8
30—35	10	2,0
35—40	4	0,8

10.2. Оценки параметров генеральной совокупности по ее выборке

1. Выборка как набор случайных величин. Пусть имеется некоторая генеральная совокупность, каждый объект которой наделен количественным признаком X. При случайном извлечении объекта из генеральной совокупности становится известным значение x

признака X этого объекта. Таким образом, мы можем рассматривать извлечение объекта из генеральной совокупности как испытание, X — как случайную величину, а x — как одно из возможных значений X.

Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, к какому типу распределений относится признак X. Естественно, возникает задача оценки (приближенного нахождения) параметров, которыми определяется это распределение. Например, если известно, что изучаемый признак распределен в генеральной совокупности нормально, то необходимо оценить, т. е. приближенно найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, так как эти два параметра полностью определяют нормальное распределение.

Обычно в распоряжении исследователя имеются лишь данные выборки генеральной совокупности, например значения количественного признака $x_1, x_2, \dots, x_n$, полученные в результате n наблюдений (здесь и далее наблюдения предполагаются независимыми). Через эти данные и выражают оцениваемый параметр.

Опытные значения признака X можно рассматривать и как значения разных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ с тем же распределением, что и X, и, следовательно, с теми же числовыми характеристиками, которые имеет X. Значит, $M(X_i) = M(X)$ и $D(X_i) = D(X)$. Величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ можно считать независимыми в силу независимости наблюдений. Значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ в этом случае *называют реализациями* случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$. Отсюда и из предыдущего следует, что найти оценку неизвестного параметра — значит найти функцию от наблюдаемых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, которая и дает приближенное значение оцениваемого параметра.

2. Генеральная и выборочная средние. Методы их расчета. Пусть изучается дискретная генеральная совокупность объема N относительно количественного признака X.

Определение 1. ***Генеральной средней*** $\bar{x}_г$ (или a) называется среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, \dots, x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$\bar{x}_г = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \dots + x_N).$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \dots, x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \dots, N_k$, причем $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$, то

$$\bar{x}_г = \frac{1}{N}(x_1 N_1 + x_2 N_2 + \dots + x_k N_k)$$

или

$$\bar{x}_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i N_i. \qquad (10.1)$$

Как уже отмечалось (см. п. 1), извлечение объекта из генеральной совокупности есть наблюдение случайной величины X.

Пусть все значения $x_1, x_2, ..., x_N$ различны. Так как каждый объект может быть извлечен с одной и той же вероятностью $\frac{1}{N}$, то

$$M(X) = x_1 \cdot \frac{1}{N} + x_2 \cdot \frac{1}{N} + \ldots + x_N \cdot \frac{1}{N} = \bar{x}_{\text{г}},$$

т. е.

$$M(X) = \bar{x}_{\text{г}}. \qquad (10.2)$$

Такой же итог следует, если значения $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_k$.

В случае непрерывного распределения признака X по определению полагают $\bar{x}_{\text{г}} = M(X)$.

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X произведена выборка объема n.

Определение 2. ***Выборочной средней*** $\bar{x}_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое значений признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n). \qquad (10.3)$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k)$$

или

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i. \qquad (10.4)$$

Пример 10.4. Выборочным путем были получены следующие данные о массе 20 морских свинок при рождении (г): 30, 30, 25, 32, 30, 25, 33, 32, 29, 28, 27, 36, 31, 34, 30, 23, 28, 31, 36, 30. Найдем выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}}$.

Решение. Согласно формуле (10.4)

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{30 \cdot 5 + 25 \cdot 2 + 32 \cdot 2 + 33 + 29 + 28 \cdot 2 + 27 + 36 \cdot 2 + 31 \cdot 2 + 34 + 23}{20} = 30.$$

Итак, $\bar{x}_{\text{в}} = 30$ г.

Здесь для облегчения вычислений можно использовать калькулятор. То же следует иметь в виду и в ряде других примеров этой главы.

Ниже, не уменьшая общности рассуждений, будем считать значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака различными.

Разумеется, выборочная средняя для различных выборок того же объема n из той же генеральной совокупности будет получаться, вообще говоря, различной. И это не удивительно — ведь извлечение

i-го по счету объекта есть наблюдение случайной величины X_i, а их среднее арифметическое

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

есть тоже случайная величина.

Таким образом, всевозможные могущие получиться выборочные средние есть возможные значения случайной величины $\bar{X}$, которая называется ***выборочной средней случайной величиной.***

Найдем $M(\bar{X})$, пользуясь тем, что $M(X_i) = M(X)$ (см. п. 1).

С учетом свойств математического ожидания (см. гл. 9) получаем

$$M(\bar{X}) = M\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right] = \frac{1}{n}\left[M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[M(X) + M(X) + \ldots + M(X)\right] = \frac{1}{n} \cdot na = a.$$

Итак, $M(\bar{X})$ (математическое ожидание выборочной средней) совпадает с a (генеральной средней).

Теперь найдем $D(\bar{X})$. Так как $D(X_i) = D(X)$ (п. 1) и $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, то согласно свойствам дисперсии (см. гл. 9) получаем

$$D(\bar{X}) = D\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right] = \frac{1}{n^2}\left[D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[D(X) + D(X) + \ldots + D(X)\right] = \frac{1}{n^2} \cdot nD(X) = \frac{D(X)}{n},$$

т. е.

$$D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n}. \tag{10.5}$$

Наконец, отметим, что если варианта x_i — большие числа, то для облегчения вычисления выборочной средней применяют следующий прием. Пусть C — константа.

Так как

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - C) + nC,$$

то формула (10.3) преобразуется к виду

$$\bar{x}_в = C + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - C). \tag{10.6}$$

Константу C (так называемый, *ложный нуль*) берут такой, чтобы, во-первых, разности $x_i - C$ были небольшими и, во-вторых, число C было по возможности «круглым».

Пример 10.5. Имеется выборка:

$x_1 = 71{,}88$; $x_2 = 71{,}93$; $x_3 = 72{,}05$; $x_4 = 72{,}07$; $x_5 = 71{,}90$;
$x_6 = 72{,}02$; $x_7 = 71{,}93$; $x_8 = 71{,}77$; $x_9 = 72{,}11$; $x_{10} = 71{,}96$.

Найдем среднюю выборочную.

Решение. Берем $C = 72{,}00$ и вычисляем разности $\alpha_i = x_i - C$:

$\alpha_1 = -0{,}12$; $\alpha_2 = -0{,}07$; $\alpha_3 = 0{,}05$; $\alpha_4 = 0{,}07$; $\alpha_5 = -0{,}10$;
$\alpha_6 = 0{,}02$; $\alpha_7 = -0{,}07$; $\alpha_8 = -0{,}23$; $\alpha_9 = 0{,}11$; $\alpha_{10} = -0{,}04$.

Их сумма

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{10} = -0{,}38,$$

их среднее арифметическое

$$\frac{1}{10}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{10}) = -0{,}038 \approx -0{,}04.$$

Тогда, выборочная средняя

$$\bar{x}_\text{в} \approx 72{,}00 - 0{,}04 = 71{,}96.$$

3. Генеральная и выборочная дисперсии. Для того чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят следующую характеристику — генеральную дисперсию.

Определение 1. *Генеральной дисперсией* $D_\text{г}$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака X генеральной совокупности от генеральной средней $\bar{x}_\text{г}$.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$D_\text{г} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_\text{г})^2.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_k$, причем $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$, то

$$D_\text{г} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_\text{г})^2 N_i. \quad (10.7)$$

Пример 10.6. Генеральная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	2	4	5	6
N_i	8	9	10	3

Найдем генеральную дисперсию.

Решение. Согласно формулам (10.1) и (10.7)

$$\bar{x}_\text{г} = \frac{2\cdot 8 + 4\cdot 9 + 5\cdot 10 + 6\cdot 3}{8 + 9 + 10 + 3} = \frac{120}{30} = 4,$$

$$D_\text{г} = \frac{(2-4)^2\cdot 8 + (4-4)^2\cdot 9 + (5-4)^2\cdot 10 + (6-4)^2\cdot 3}{30} = \frac{54}{30} = 1{,}8.$$

Генеральным средним квадратическим отклонением (***стандартом***) называется $\sigma_г = \sqrt{D_г}$.

Пусть все значения $x_1, x_2, \ldots, x_N$ различны.

Найдем дисперсию признака X, рассматриваемого как случайную величину:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2].$$

Так как $M(X) = \bar{x}_г$ и $P\{X = x_i\} = \dfrac{1}{N}$ (см. п. 2), то

$$D(X) = (x_1 - \bar{x}_г)^2 \frac{1}{N} + (x_2 - \bar{x}_г)^2 \frac{1}{N} + \ldots + (x_N - \bar{x}_г)^2 \frac{1}{N} = D_г,$$

т. е.

$$D(X) = D_г.$$

Таким образом, дисперсия $D(X)$ равна $D_г$.

Такой же итог следует, если значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_k$.

В случае непрерывного распределения признака X по определению полагают

$$D_г = D(X). \tag{10.8}$$

С учетом формулы (10.8) формула (10.5) (п. 2) перепишется в виде

$$D(\bar{X}) = \frac{D_г}{n},$$

откуда $\sqrt{D(\bar{X})} = \dfrac{\sqrt{D_г}}{\sqrt{n}}$ или $\sigma(\bar{X}) = \dfrac{\sigma_г}{\sqrt{n}}$. Величину $\sigma(\bar{X})$ называют *средней квадратической ошибкой*.

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения $\bar{x}_в$, вводят нижеследующую характеристику.

Определение 2. ***Выборочной дисперсией $D_в$*** называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака X от выборочной средней $\bar{x}_в$.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2. \tag{10.9}$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 n_i. \tag{10.10}$$

Пример 10.7. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	1	2	3	4
N_i	20	15	10	5

Найдем выборочную дисперсию.

Р е ш е н и е. Согласно формулам (10.4) и (10.10)

$$\bar{x}_в = \frac{1\cdot 20 + 2\cdot 15 + 3\cdot 10 + 4\cdot 5}{20+15+10+5} = \frac{100}{50} = 2,$$

$$D_в = \frac{(1-2)^2\cdot 20 + (2-2)^2\cdot 15 + (3-2)^2\cdot 10 + (4-2)^2\cdot 5}{50} = \frac{50}{50} = 1.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением (*стандартом*) называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}.$$

В условиях примера 10.5 получаем, что $\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{1} = 1$. Ниже, не уменьшая общности рассуждений, будем считать значения x_1, x_2, ..., x_n признака различными.

Выборочную дисперсию, рассматриваемую нами как случайную величину, будем обозначать $\tilde{S}^2$:

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Справедлива (см. например, [2]) следующая теорема.

Теорема 10.1. *Математическое ожидание выборочной дисперсии равно* $\frac{n-1}{n}D_г$, т.е. $M(\tilde{S}^2) = \frac{n-1}{n}D_г$.

В заключение настоящего пункта отметим, что если варианты x_i — большие числа, то для облегчения вычисления выборочной дисперсии $D_в$ формулу (10.9) преобразуют к следующему виду:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - C)^2 - (\bar{x}_в - C)^2,$$

где C — ложный нуль.

4. Оценки параметров распределения. Уже говорилось (см. п. 1) о том, что одной из задач статистики является оценка параметров распределения случайной величины X по данным выборки. При этом в теоретических рассуждениях считают, что генеральная совокупность бесконечна. Это делается для того, чтобы можно было переходить к пределу при $n \to \infty$, где n — объем выборки. Для оценки параметров распределения X из данных выборки составляют выражения, которые должны служить оценками неизвестных параметров. Например, $\bar{X}$ (см. п. 2) является оценкой генеральной средней, а $\tilde{S}^2$

(см. п. 3) — оценкой генеральной дисперсии $D_г$. Обозначим через Θ оцениваемый параметр, через $\tilde{\Theta}_n$ — оценку этого параметра ($\tilde{\Theta}_n$ является выражением, составленным из $X_1, X_2, ..., X_n$ (см. п. 1). Для того чтобы оценка $\tilde{\Theta}_n$ давала хорошее приближение, она должна удовлетворять определенным требованиям. Укажем эти требования.

Несмещенной называют оценку $\tilde{\Theta}_n$, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру Θ, т. е. $M(\tilde{\Theta}_n) = \Theta$, в противном случае оценка называется *смещенной*.

Пример 10.8. Оценка $\bar{X}$ является несмещенной оценкой генеральной средней a, так как $M(\bar{X})=a$ (см. п. 2).

Пример 10.9. Оценка $\tilde{S}^2$ является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D_г$, так как согласно установленной выше теореме (см. п. 3)

$$M(\tilde{S}^2)=\frac{n-1}{n}D_г \neq D_г.$$

Пример 10.10. Наряду с выборочной дисперсией $\tilde{S}^2$ рассматривают еще так называемую исправленную дисперсию $S^2=\frac{n}{n-1}\tilde{S}^2$, которая является также оценкой генеральной дисперсии. Для S^2 с учетом установленной выше теоремы (см. п. 3) имеем

$$M(S^2)=M\left(\frac{n}{n-1}\tilde{S}^2\right)=\frac{n}{n-1}M(\tilde{S}^2)=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}D_г=D_г.$$

Таким образом, оценка S^2 в отличие от оценки $\tilde{S}^2$ является несмещенной оценкой генеральной дисперсии. Явное выражение для S^2 имеет вид

$$S^2=\frac{n}{n-1}\tilde{S}^2=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,$$

т. е.

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2. \tag{10.11}$$

Естественно в качестве приближенного неизвестного параметра брать несмещенные оценки, для того чтобы не делать систематической ошибки в сторону завышения или занижения.

Состоятельной называют такую оценку $\tilde{\Theta}_n$ параметра Θ, что для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ вероятность $P\{|\tilde{\Theta}_n-\Theta|<\varepsilon\}$ при $n\to\infty$ стремится к 1[1]. Это означает, что при достаточно больших n можно с вероятностью, близкой к 1, т. е. почти наверное, утверждать, что оценка $\tilde{\Theta}_n$ отличается от оцениваемого параметра Θ меньше чем на ε.

Очевидно, такому требованию должна удовлетворять всякая оценка, пригодная для практического использования.

---

[1] В таком случае говорят, что $\tilde{\Theta}_n$ сходится к Θ по вероятности.

Заметим, что несмещенная оценка $\tilde{\Theta}_n$ будет состоятельной, если при $n \to \infty$ ее дисперсия стремится к нулю: $D(\tilde{\Theta}_n) \to 0$.

Пример 10.11. Как было установлено ранее (см. п. 3), $D(\bar{X}) = \dfrac{D_г}{n}$. Отсюда следует, что несмещенная оценка $\bar{X}$ является и состоятельной, так как

$$\lim_{n\to\infty} D(\bar{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{D_г}{n} = D_г \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Можно показать, что несмещенная оценка S^2 является также состоятельной. Поэтому в качестве оценки генеральной дисперсии принимают исправленную дисперсию. Заметим, что оценки S^2 и $\tilde{S}^2$ отличаются множителем $\dfrac{n}{n-1}$, который стремится к 1 при $n \to \infty$. На практике S^2 и $\tilde{S}^2$ не различают при $n > 30$.

Для оценки генерального среднего квадратического отклонения используют исправленное среднее квадратическое отклонение, которое равно квадратному корню из исправленной дисперсии:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}. \qquad (10.12)$$

Левые части формул (10.11), (10.12), в которых случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ заменены их реализацией $x_1, x_2, ..., x_n$ и $\bar{X}$ — выборочной средней $\bar{x}_в$, будем обозначать соответственно через s^2 и s.

Отметим, что если варианты x_i — большие числа, то для облегчения вычисления s^2 формулу для s^2 аналогично формуле (10.9) преобразуют к виду

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - C)^2 - (\bar{x}_в - C)^2\right], \qquad (10.13)$$

где C — ложный нуль.

Оценки, обладающие свойствами несмещенности и состоятельности, при ограниченном числе опытов могут отличаться дисперсиями.

Ясно, что чем меньше дисперсия оценки, тем меньше вероятность грубой ошибки при определении приближенного значения параметра. Поэтому необходимо, чтобы дисперсия оценки была минимальной. Оценку, обладающую таким свойством, *называют эффективной.*

Из отмеченных требований, предъявляемых к оценке, наиболее важными являются требования несмещенности и состоятельности.

Пример 10.12. С плодового дерева случайным образом отобрано 10 плодов. Их массы $x_1, x_2, ..., x_{10}$ (в граммах) записаны в первой колонке приведенной ниже таблицы. Обработаем статистические данные выборки. Для вычисления $\bar{x}_в$ и s по формулам (10.6) и (10.13) введем ложный нуль $C = 250$ и все необходимые при этом вычисления сведем в таблицу.

i	x_i	$x_i - C$	$(x_i - C)^2$
1	225	−25	625
2	274	24	576
3	305	55	3 025
4	253	3	9
5	220	−30	900
6	245	−5	25
7	211	−39	1 521
8	234	−16	256
9	230	−20	400
10	231	−19	261
Сумма		−72	7 598

Следовательно,

$$\bar{x}_{\text{в}} = 250 + \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 250) = 250 + \frac{1}{10}(-72) = 250 - 7{,}2 \approx 243 \text{ (г)};$$

$$s = \sqrt{\frac{10}{9}\left[\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 250)^2 - (250 - 7{,}2 - 250)^2\right]} = \sqrt{\frac{10}{9}\left[759{,}8 - (-7{,}2)^2\right]} \approx 28 \text{ (г)}.$$

Отсюда $\dfrac{s}{\sqrt{10}} \approx 9$ (г).

Итак, оценка генеральной средней массы плода равна 243 г со средней квадратической ошибкой 9 г.

Оценка генерального среднего квадратического отклонения массы плода равна 28 г.

10.3. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

1. Надежность. Доверительные интервалы. Пусть Θ — оцениваемый параметр, $\tilde{\Theta}_n$ — его оценка, составленная из $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Если известно, что оценка $\tilde{\Theta}_n$ является несмещенной и состоятельной, то по данным выборки вычисляют значение $\tilde{\Theta}_n$ и считают его приближением истинного значения Θ. При этом среднее квадратическое отклонение (если его вообще вычисляют) оценивает порядок ошибки. Такие оценки называют *точечными*. Например, в предыдущем параграфе речь шла о точечных оценках генеральной средней и генеральной дисперсии. В общем случае, когда о распределении признака X ничего не известно, это уже немало.

Если же о распределении имеется какая-либо информация, то можно сделать больше.

В данном параграфе речь будет идти об оценке параметров a и σ случайной величины, имеющей нормальное распределение. Это очень важный случай. Например (см. подразд. 11.5, п. 6), результат измерения имеет нормальное распределение. В этом случае становится возможным применять, так называемое, интервальное оценивание, к изложению которого мы и переходим.

Пусть $\delta > 0$ — некоторое число. Если выполняется неравенство $|\Theta - \tilde{\Theta}_n| < \delta$, т. е. $-\delta < \Theta - \tilde{\Theta}_n < \delta$, что можно записать в виде $\tilde{\Theta}_n - \delta < \Theta < \tilde{\Theta}_n + \delta$, то говорят, что интервал $(\tilde{\Theta}_n - \delta, \tilde{\Theta}_n + \delta)$ покрывает параметр Θ. Однако невозможно указать оценку $\tilde{\Theta}_n$, чтобы событие $\{|\Theta - \tilde{\Theta}_n| < \delta\}$ было достоверным, поэтому мы будем говорить о вероятности этого события. Число δ называют *точностью* оценки $\tilde{\Theta}_n$.

Определение. *Надежностью* (*доверительной вероятностью*) оценки $\tilde{\Theta}_n$ параметра Θ для заданного $\delta > 0$ *называют* вероятность γ того, что интервал $(\tilde{\Theta}_n - \delta, \tilde{\Theta}_n + \delta)$ покроет параметр Θ, т. е.

$$\gamma = P\{\tilde{\Theta}_n - \delta < \Theta < \tilde{\Theta}_n + \delta\} = P\{|\tilde{\Theta}_n - \Theta| < \delta\}.$$

Заметим, что после того как по данным выборки вычислена оценка $\tilde{\Theta}_n$, событие $\{|\Theta - \tilde{\Theta}_n| < \delta\}$ становится или достоверным, или невозможным, так как интервал $(\tilde{\Theta}_n - \delta, \tilde{\Theta}_n + \delta)$ или покрывает Θ, или нет. Но дело в том, что параметр Θ нам неизвестен. Поэтому мы называем надежностью γ уже вычисленной оценки $\tilde{\Theta}_n$ вероятность того, что интервал $(\tilde{\Theta}_n - \delta, \tilde{\Theta}_n + \delta)$, найденный для произвольной выборки, покроет Θ. Если мы сделаем много выборок объема n и для каждой из них построим интервал $(\tilde{\Theta}_n - \delta, \tilde{\Theta}_n + \delta)$, то доля тех выборок, чьи интервалы покроют Θ, равна γ.

Иными словами, γ есть мера нашего доверия вычисленной оценке $\tilde{\Theta}_n$.

Ясно, что чем меньше число δ, тем меньше надежность γ.

Определение. *Доверительным интервалом* называют найденный по данным выборки интервал $(\tilde{\Theta}_n - \delta, \tilde{\Theta}_n + \delta)$, который покрывает параметр Θ с заданной надежностью γ.

Надежность γ обычно принимают равной 0,95, или 0,99, или 0,999.

Конечно, нельзя категорически утверждать, что найденный доверительный интервал покрывает параметр Θ. Но в этом можно быть уверенным на 95 % при $\gamma = 0{,}95$, на 99 % при $\gamma = 0{,}99$ и т. д. Это означает, что если сделать много выборок, для 95 % из них (если, например, $\gamma = 0{,}95$) вычисленные доверительные интервалы действительно покроют Θ.

2. Доверительный интервал для математического ожидания при известном σ. В некоторых случаях среднее квадратическое отклонение σ ошибки измерения (а вместе с нею и самого измерения) бывает известно. Например, если измерения производятся одним и тем же прибором при одних и тех же условиях, то σ для всех измерений одно и то же и обычно бывает известно.

Итак, пусть случайная величина X распределена нормально с параметрами a и σ, причем σ известно. Построим доверительный интервал, покрывающий неизвестный параметр a с заданной надежностью γ. Данные выборки есть реализации случайных величин X_1, X_2, ..., X_n, имеющих нормальное распределение с параметрами a и σ (см. подразд. 10.2, п. 1). Оказывается, что и выборочная средняя случайная величина $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$ тоже имеет нормальное распределение (это мы примем без доказательства). При этом (см. подразд. 10.2, пп. 2, 3)

$$M(\bar{X}) = a, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение $P(|\bar{X} - a| < \delta) = \gamma$, где γ — заданная надежность. Пользуясь формулой (9.25) (см. подразд. 9.5), получаем

$$P\left(|\bar{X} - a| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

или

$$P\left(|\bar{X} - a| < \delta\right) = 2\Phi(t),$$

где

$$t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}. \tag{10.14}$$

Найдя из равенства (10.14) $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, можем написать

$$P\left(|\bar{X} - a| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t).$$

Так как P задана и равна γ, то окончательно имеем (для получения рабочей формулы выборочную среднюю заменяем на $\bar{x}_в$):

$$P\left(\bar{x}_в - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Смысл полученного соотношения таков: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\bar{x}_в - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, x_в + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Здесь число

t определяется из равенства $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$ (оно следует из $2\Phi(t)=\gamma$) по таблице приложения 2.

Как уже упоминалось, надежность γ обычно принимают равной или 0,95, или 0,99, или 0,999.

Пример 10.13. Признак X распределен в генеральной совокупности нормально с известным $\sigma = 0{,}40$. Найдем по данным выборки доверительный интервал для a с надежностью $\gamma = 0{,}99$, если $n = 20$, $\bar{x}_в = 6{,}34$.

Решение. Для $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}=\frac{0{,}99}{2}=0{,}495$ находим по таблице приложения 2 $t = 2{,}58$. Следовательно, $\delta = 2{,}58\cdot\frac{0{,}40}{\sqrt{20}}=0{,}23$. Концы доверительного интервала $6{,}34 - 0{,}23 = 6{,}11$ и $6{,}34 + 0{,}23 = 6{,}57$. Итак, доверительный интервал $(6{,}11;\ 6{,}57)$ покрывает a с надежностью 0,99.

3. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном σ. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с неизвестными нам параметрами a и σ. Оказывается, что случайная величина (ее возможные значения будем обозначать через t)

$$T=\frac{\bar{X}-a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

(n — объем выборки, $\bar{X}$ — выборочная средняя, S — исправленное среднее квадратическое отклонение) имеет распределение, не зависящее от a и σ. Оно называется распределением Стьюдента[1].

Плотность вероятности распределения Стьюдента дается формулой

$$S(t,n)=B_n\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где коэффициент B_n зависит от объема выборки. Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$P(|T|<t_\gamma)=\gamma,$$

где γ — заданная надежность.

Так как $S(t, n)$ — четная функция от t, то, пользуясь формулой (9.34) (см. подразд. 9.4), получаем

$$P\left(\frac{|\bar{X}-a|\sqrt{n}}{S}<t_\gamma\right)=2\int_0^{t_\gamma}S(t,n)\,dt=\gamma.$$

Отсюда

$$P\left(\bar{X}-\frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}<a<\bar{X}+\frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}\right)=\gamma.$$

---

[1] Стьюдент — псевдоним английского статистика В. Госсета.

Следовательно, приходим к утверждению: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\bar{x}_в - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}; \bar{x}_в + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a, точность оценки $\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$. Здесь случайные величины $\bar{X}$ и S заменены неслучайными величинами $\bar{x}_в$ и s, найденными по выборке.

В приложении 3 приведена таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$ для различных значений n и обычно задаваемых значений надежности.

Заметим, что при $n \geq 30$ распределение Стьюдента практически не отличается от нормированного нормального распределения (см. подразд. 9.5, п. 5). Это связано с тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Пример 10.14. Признак X распределен в генеральной совокупности нормально. Найдем доверительный интервал для $\bar{x}_г$ с надежностью $\gamma = 0{,}99$, если $n = 20$, $\bar{x}_в = 6{,}34$, $s = 0{,}40$.

Решение. Для надежности $\gamma = 0{,}99$ и $n = 20$ находим по таблице приложения 3 $t_\gamma = 2{,}861$. Следовательно, $\delta = 2{,}861 \cdot \frac{0{,}40}{\sqrt{20}} \approx 0{,}26$. Концы доверительного интервала $6{,}34 - 0{,}26 = 6{,}08$ и $6{,}34 + 0{,}26 = 6{,}60$. Итак, доверительный интервал (6,08; 6,60) покрывает $\bar{x}_г$ с надежностью 0,99.

4. Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения. Для нахождения доверительного интервала для среднего квадратического отклонения σ будем использовать следующее предложение, устанавливаемое аналогично двум предыдущим (см. пп. 2 и 3).

С надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $(s - sq;\ s + sq)$ покрывает неизвестный параметр σ; точность оценки $\delta = sq$.

В приложении 4 приведена таблица значений $q = q(\gamma, n)$ для различных значений n и обычно задаваемых значений надежности γ.

Пример 10.15. Признак X распределен в генеральной совокупности нормально. Найдем доверительный интервал для $\sigma_г$ с надежностью $\gamma = 0{,}95$, если $n = 20$, $s = 0{,}40$.

Решение. Для надежности $\gamma = 0{,}95$ и $n = 20$ находим в таблице приложения 4 $q = 0{,}37$. Далее $sq = 0{,}40 \cdot 0{,}37 \approx 0{,}15$. Концы доверительного интервала $0{,}40 - 0{,}15 = 0{,}25$ и $0{,}40 + 0{,}15 = 0{,}55$. Итак, доверительный интервал (0,25; 0,55) покрывает $\sigma_г$ с надежностью 0,95.

Примечание. Выше предполагалось, что $q < 1$. Если $q > 1$, то, учитывая, что $\sigma > 0$, получаем

$$0 < \sigma < s + sq.$$

Значения q и в этом случае определяются по таблице приложения 4.

Пример 10.16. Признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 10$ найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}16$. Найдем доверительный интервал для $\sigma_г$ с надежностью 0,999.

Решение. Для надежности $\gamma = 0{,}999$ и $n = 10$ по таблице приложения 4 находим $q = 1{,}80$.

Следовательно, искомый доверительный интервал таков:

$$0 < \sigma < 0{,}16 + 0{,}16 \cdot 1{,}80$$

или

$$0 < \sigma < 0{,}448.$$

5. Оценка истинного значения измеряемой величины. Пусть производится n независимых равноточных измерений[1] некоторой физической величины, истинное значение a которой неизвестно. Будем рассматривать результаты отдельных измерений как случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$. Эти величины независимы (измерения независимы), имеют одно и то же математическое ожидание a (истинное значение измеряемой величины), одинаковые дисперсии σ^2 (измерения равноточны) и распределены нормально (такое допущение подтверждается опытом). Таким образом, все предположения, которые были сделаны при выводе доверительных интервалов в пунктах 2 и 3 настоящего параграфа, выполняются, следовательно, мы вправе использовать полученные в них предложения. Так как обычно σ неизвестно, следует пользоваться предложением, найденным в пункте 3 данного параграфа.

Пример 10.17. По данным 9 независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметическое результатов отдельных измерений $\bar{x}_в = 42{,}319$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 5{,}0$. Требуется оценить истинное значение a измеряемой величины с надежностью $\gamma = 0{,}99$.

Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию. Поэтому задача сводится к оценке математического ожидания (при неизвестном σ) при помощи доверительного интервала

$$\bar{x}_в - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}},$$

покрывающего a с заданной надежностью $\gamma = 0{,}99$.

Пользуясь таблицей приложения 3 по $\gamma = 0{,}99$ и $n = 9$, находим $t_\gamma = 3{,}36$. Найдем точность оценки:

$$\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = 3{,}36\frac{5}{\sqrt{9}} = 3{,}36 \cdot \frac{5}{3} = 5{,}60.$$

Концы доверительного интервала

$$42{,}319 - 5{,}60 = 36{,}719 \quad \text{и} \quad 42{,}319 + 5{,}60 = 47{,}919.$$

Итак, с надежностью $\gamma = 0{,}99$ истинное значение измеряемой величины a заключено в доверительном интервале $36{,}719 < a < 47{,}919$.

[1] Т. е. измерений, проводимых в одинаковых условиях. Эти условия считают выполненными, если измерения проводят одним прибором.

6. Оценка точности измерений. В теории ошибок принято точность измерений (точность прибора) характеризовать с помощью среднего квадратического отклонения σ случайных ошибок измерений. Для оценки σ используют «исправленное» среднее квадратическое отклонение s. Поскольку обычно результаты измерений независимы, имеют одно и то же математическое ожидание (истинное значение измеряемой величины) и одинаковую дисперсию (в случае равноточных измерений), то утверждение, приведенное в п. 4, применимо для оценки точности измерений.

Пример 10.18. По 16 независимым равноточным измерениям найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}4$. Найдем точность измерений с надежностью $\gamma = 0{,}99$.

Решение. Как отмечено выше, точность измерений характеризуется средним квадратическим отклонением σ случайных ошибок измерений. Поэтому задача сводится к отысканию доверительного интервала $(s - sq;\ s + sq)$, покрывающего σ с заданной надежностью $\gamma = 0{,}99$ (см. п. 4). По таблице приложения 4 по $\gamma = 0{,}99$ и $n = 16$ найдем $q = 0{,}70$. Следовательно, искомый доверительный интервал

$$0{,}4\ (1 - 0{,}70) < \sigma < 0{,}4\ (1 + 0{,}70) \quad \text{или} \quad 0{,}12 < \sigma < 0{,}68.$$

10.4. Проверка статистических гипотез

Пусть по выборке объема n получено эмпирическое распределение с равноотстоящими вариантами:

Варианты	x_1	x_2	...	x_m
Эмпирические (наблюдаемые) частоты	n_1	n_2	...	n_m

По данным наблюдения выдвигают гипотезу о законе распределения генеральной совокупности, например предполагают, что генеральная совокупность распределена равномерно или нормально. Такие гипотезы называют *статистическими*. Затем для тех же объектов, которые попали в выборку, вычисляют частоты, уже исходя из теоретической гипотезы. В результате получают частоты (их называют *выравнивающими* частотами), которые, вообще говоря, отличаются от наблюдавшихся. Как определить, правильно или нет выдвинута гипотеза, т.е. случайны ли расхождения наблюдавшихся и выравнивающих частот или эти расхождения являются следствием неправильности гипотезы? Для решения этого вопроса применяют критерии согласия эмпирических наблюдений выдвинутой гипотезе. Имеется несколько критериев согласия: χ^2 («хи квадрат») К. Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др. Мы познакомимся с критерием согласия χ^2 Пирсона.

Предположим, что на основе приведенного выше распределения выдвинута гипотеза H: генеральная совокупность имеет нормальное распределение. Для вычисления выравнивающих частот поступают следующим образом:

1) находят значения $\bar{x}_в$, $\sigma_в = \sqrt{D_в}$;

2) выравнивающие частоты n_i' ищут по формуле

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_в}\varphi(u_i),$$

где n — сумма наблюдавшихся частот, h — разность между двумя соседними вариантами, $u_i = \dfrac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_в}$ и $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$.

В результате получено множество выравнивающих частот:

$$n_1', n_2', ..., n_m'.$$

Обозначим через χ^2 сумму квадратов разностей между эмпирическими и выравнивающими частотами, деленных на соответствующие выравнивающие частоты:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.^{1} \tag{10.15}$$

Для данной выборки по формуле (10.15) находим значение случайной величины χ^2. Обозначим его через χ_0^2. Затем определяем число $k = m - 3$, называемое *числом степеней свободы*, где m — число различных вариант выборки.

Теперь проверка гипотезы H проводится так. Задаются уровнем значимости p, т.е. столь малой вероятностью p, при которой о событии $\{\chi_0^2 > \chi^2\}$, имеющем вероятность p, можно с большой уверенностью сказать, что в единичном испытании оно не произойдет. В таблице значений χ^2 по заданному уровню значимости p и числу степеней свободы k (приложение 5) находят значение $\chi^2(p; k)$. Если окажется, что $\chi_0^2 > \chi^2(p; k)$, то гипотеза H отвергается на уровне значимости p, так как произошло событие, которое не должно было произойти при верной гипотезе H; если же $\chi_0^2 < \chi^2(p; k)$, то H принимается на уровне значимости p. Обычно в качестве p берут либо 0,05, либо 0,01, либо 0,001.

Пример 10.19. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

эмпирические частоты	6	13	38	74	106	85	30	14
теоретические частоты	3	14	42	82	99	76	37	13

---

[1] Из этой формулы видно, что, чем меньше различие между эмпирическими и выравнивающими частотами, тем меньше будет χ^2.

Вычислим χ_0^2 по формуле (10.15) (см. расчетную таблицу).

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	6	3	3	9	3
2	13	14	–1	1	0,07
3	38	42	–4	16	0,38
4	74	82	–8	64	0,78
5	106	99	7	49	0,49
6	85	76	9	81	1,07
7	30	37	–7	49	1,32
8	14	13	1	1	0,08
					$\chi_0^2 = 7{,}19$

Найдем число степеней свободы, учитывая, что число различных вариант $m = 8$. Имеем $k = 8 - 3 = 5$. По уровню значимости $p = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = 5$ по таблице значений χ^2 (приложение 5) находим $\chi^2(0{,}05; 5) = 11{,}1$. Так как $\chi_0^2 < \chi^2(0{,}05; 5)$, нет оснований отвергнуть гипотезу H.

10.5. Линейная корреляция

1. Корреляционная зависимость. Часто приходится иметь дело с более сложной зависимостью, чем функциональная. Такова, например, связь между осадками и урожаем или связь между толщиной снегового покрова зимой и объемом стока последующего половодья. Здесь каждому значению одной величины соответствует множество возможных значений другой величины. Подобного рода зависимости относят к *корреляционным* зависимостям.

Определение 1. Две случайные величины X и Y находятся в *корреляционной* зависимости, если каждому значению любой из этих величин соответствует определенное распределение вероятностей другой величины.

Определение 2. *Условным математическим ожиданием* дискретной случайной величины X при $Y = y$ (y — определенное возможное значение Y) называют сумму произведений возможных значений величины X на их условные вероятности:

$$M_y(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_y(X \quad x_i), \qquad =$$

где $P_y(X = x_i)$ — условная вероятность равенства $X = x_i$ при условии, что $Y = y$.

Для непрерывных величин

$$M_y(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_y(x)dx,$$

где $\varphi_y(x)$ — плотность вероятности случайной непрерывной величины X при условии $Y = y$.

Условное математическое ожидание $M_y(X)$ есть функция от y: $M_y(X) = f(y)$, которую называют функцией *регрессии* величины X на величину Y.

Аналогично определяется условное математическое ожидание случайной величины Y и функция регрессии Y на X:

$$M_x(Y) = g(x).$$

Уравнение $x = f(y)$ $(y = g(x))$ называют *уравнением регрессии X на Y* (Y на X), а линию на плоскости, соответствующую этому уравнению, называют *линией регрессии*.

Линия регрессии Y на X (X на Y) показывает, как в среднем зависит Y от X (X от Y).

Пример 10.20. X и Y независимы, $M(X) = a$, $M(Y) = b$. Тогда $g(x) = M_x(Y) = M(Y) = b$; $f(y) = M_y(X) = M(X) = a$. Линии регрессии изображены на рис. 10.3.

Пример 10.21. X и Y связаны линейной зависимостью: $Y = AX + B$, $A \neq 0$. Тогда функция регрессии Y на X будет иметь вид

$$g(x) = M_x(Y) = M(Ax + B) = Ax + B.$$

Так как $X = \frac{1}{A}(Y - B)$, то функция регрессии X на Y имеет вид

$$f(y) = M_y(X) = M\left[\frac{1}{A}(y - B)\right] = \frac{1}{A}(y - B).$$

Значит, линия регрессии X на Y

$$x = \frac{1}{A}(y - B), \text{ т.е. } y = Ax + B.$$

Таким образом, в случае линейной зависимости X и Y линии регрессии X на Y и Y на X совпадают и эта линия — прямая.

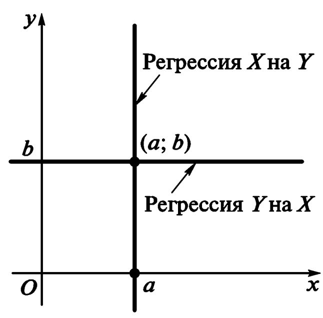


Рис. 10.3

2. Коэффициент корреляции. Для характеристики корреляционной зависимости между случайными величинами вводится понятие коэффициента корреляции.

Определение 1. Если X и Y — независимые случайные величины, то

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y). \quad (10.16)$$

Если же X и Y не являются независимыми случайными величинами, то, вообще говоря, $M(XY) \neq M(X) \cdot M(Y)$.

Условились за меру связи (зависимости) двух случайных величин X и Y принять безразмерную величину r, определяемую соотношением

$$r = \frac{M(XY) - M(X) \cdot M(Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} \tag{10.17}$$

или более кратко соотношением

$$r = \frac{\mu}{\sigma_1 \sigma_2}, \tag{10.18}$$

где

$$\mu = M(XY) - M(X) M(Y), \sigma_1 = \sigma(X), \sigma_2 = \sigma(Y),$$

и называемую *коэффициентом корреляции.*

Легко видеть, что

$$\mu = M(XY) - M(X) M(Y) = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

Определение 2. Случайные величины X и Y называют *некоррелированными*, если $r = 0$, и *коррелированными*, если $r \neq 0$.

Пример 10.22. Независимые случайные величины X и Y являются некоррелированными, так как в силу соотношения (10.16) $r = 0$.

Пример 10.23. Пусть случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью: $Y = AX + B$, $A \neq 0$. Найдем коэффициент корреляции.

Решение. Имеем

$$\mu = M(XY) - M(X) M(Y) = M(AX^2 + BX) - M(X) M(AX + B) =$$
$$= AM(X^2) + BM(X) - AM^2(X) - BM(X) = A(M(X^2) - M^2(X)) = A\sigma^2(X)$$

(см. гл. 9),

$$\sigma^2(Y) = D(Y) = D(AX + B) = D(AX) = A^2 D(X) = A^2\sigma^2(X),$$

откуда

$$\sigma(Y) = |A|\sigma(X).$$

Поэтому

$$|r| = \frac{|A|\sigma^2(X)}{|A|\sigma^2(X)} = 1.$$

Таким образом, коэффициент корреляции случайных величин, связанных линейной зависимостью, равен ± 1 (точнее, $r = 1$, если $A > 0$, и $r = -1$, если $A < 0$).

Отметим некоторые свойства коэффициента корреляции.

Из примера 1 следует:

1. Если X и Y — независимые случайные величины, то коэффициент корреляции равен нулю.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. (Доказательство см. в [4].)

2. Укажем без доказательства, что $|r| \le 1$. При этом если $|r| = 1$, то между случайными величинами X и Y имеет место функциональная, а именно линейная, зависимость. (Доказательство см. в [4].)

3. Как видно из формулы (10.17), коэффициент корреляции характеризует относительную величину отклонения математического ожидания произведения $M(XY)$ от произведения математических ожиданий $M(X) \cdot M(Y)$ величин X и Y. Так как это отклонение имеет место только для зависимых величин, то можно сказать, что коэффициент корреляции характеризует тесноту зависимости между X и Y.

3. Линейная корреляция. Этот вид корреляционной зависимости встречается довольно часто.

Определение. Корреляционная зависимость между случайными величинами X и Y называется *линейной корреляцией*, если обе функции регрессии $f(y)$ и $g(x)$ являются линейными. В этом случае обе линии регрессии являются прямыми; они называются ***прямыми регрессии***.

Выведем уравнение прямой регрессии Y на X, т.е. найдем коэффициенты линейной функции $g(x) = Ax + B$.

Обозначим $M(X) = a$, $M(Y) = b$, $M[(X - a)^2] = \sigma_1^2$, $M[(Y - b)^2] = \sigma_2^2$. С использованием свойств математического ожидания (см. гл. 9) находим

$$M(Y) = M[g(X)] = M(AX + B) = AM(X) + B, \text{ т.е. } b = Aa + B,$$

откуда $B = b - Aa$.

Далее с помощью тех же свойств математического ожидания имеем

$$M(XY) = M[Xg(X)] = M(AX^2 + BX) =$$
$$= AM(X^2) + BM(X) = AM(X^2) + (b - Aa)a,$$

откуда

$$A = \frac{\mu}{M(X^2) - a^2}$$

или, согласно свойству 1 дисперсии (см. гл. 9),

$$A = \frac{\mu}{\sigma_1^2}.$$

Полученный коэффициент называют ***коэффициентом регрессии*** Y на X и обозначают $\rho(Y/X)$:

$$\rho(Y/X) = \frac{\mu}{\sigma_1^2}. \qquad (10.19)$$

Таким образом, уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид

$$y = \rho(Y/X)(x - a) + b. \qquad (10.20)$$

Аналогично можно получить уравнение прямой регрессии X на Y:

$$x = \rho(X/Y)(y - b) + a, \tag{10.21}$$

где коэффициент регрессии X на Y

$$\rho(X/Y) = \frac{\mu}{\sigma_2^2}. \tag{10.22}$$

Уравнения прямых регрессии можно записать в более симметричном виде, если воспользоваться коэффициентом корреляции. С учетом этого коэффициента

$$\rho(Y/X) = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad \rho(X/Y) = r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \tag{10.23}$$

и поэтому уравнения прямых регрессии принимают вид

$$y - b = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - a), \quad x - a = r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - b).$$

Из уравнений прямых регрессии видно, что обе эти прямые проходят через точку (a; b); угловые коэффициенты прямых регрессии равны соответственно (обозначения углов показаны на рис. 10.4):

$$\operatorname{tg}\alpha = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{r}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Так как $|r| \le 1$, то $|\operatorname{tg}\alpha| \le |\operatorname{tg}\beta|$. Это означает, что прямая регрессии Y на X имеет меньший наклон к оси абсцисс, чем прямая регрессии X на Y. Чем ближе $|r|$ к 1, тем меньше угол между прямыми регрессии. Эти прямые сливаются тогда и только тогда, когда $|r| = 1$.

При $r = 0$ прямые регрессии имеют уравнения $y = b$; $x = a$.

В этом случае $M_x(Y) = b = M(Y)$; $M_y(X) = a = M(X)$.

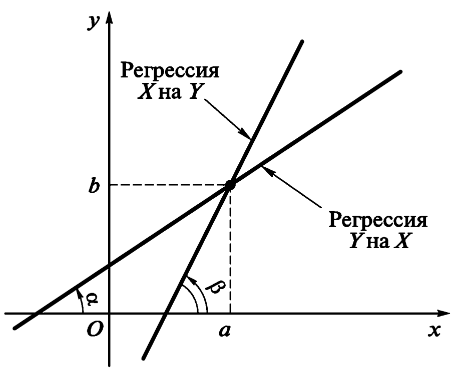


Рис. 10.4

Из (10.23) видно, что коэффициенты регрессии имеют тот же знак, что и коэффициент корреляции r, и связаны соотношением

$$\rho(Y/X)\rho(X/Y) = r^2.$$

4. Расчет прямых регрессии. Пусть проведено n опытов, в результате которых получены следующие значения системы величин $(X;\ Y)$: $(x_i,\ y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. За приближенные значения $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$ и $D(Y)$ принимают их выборочные значения

$$\bar{x}_{в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y}_{в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_{в})^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_{в})^2.$$

Оценкой для μ служит величина

$$\mu_{в} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_{в})(y_i - \bar{y}_{в}).$$

Заменяя в соотношениях (10.18), (10.19), (10.22) величины μ, σ_1, σ_2 их выборочными значениями $\mu_{в}$, s_1, s_2, получаем приближенные значения коэффициента корреляции и коэффициентов регрессий

$$r \approx \frac{\mu_{в}}{s_1 s_2}, \quad \rho(Y/X) \approx \frac{\mu_{в}}{s_1^2}, \quad \rho(X/Y) \approx \frac{\mu_{в}}{s_2^2}$$

($\frac{\mu_{в}}{s_1 s_2}$ и $\frac{\mu_{в}}{s_1^2}$, $\frac{\mu_{в}}{s_2^2}$ — выборочные коэффициенты соответственно корреляции[1] и регрессий).

Подставив в уравнения (10.20) и (10.21) вместо a, b, $\rho(Y/X)$ и $\rho(X/Y)$ их приближенные значения, получим выборочные уравнения прямых регрессий:

$$y - \bar{y}_{в} = \frac{\mu_{в}}{s_1^2}(x \quad \bar{x}_{в}),$$

$$x - \bar{x}_{в} = \frac{\mu_{в}}{s_2^2}(y \quad \bar{y}_{в}).$$

Выполните задания

1. Постройте полигон по данному распределению:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

[1] Выборочный коэффициент корреляции $\frac{\mu_{в}}{s_1 s_2}$ обозначим через $r_{в}$.

2. Постройте гистограмму следующего распределения:

Частичный интервал длиной h	Сумма частот вариант частичного интервала n_i
2—5	9
5—8	10
8—11	25
11—14	6

3. Генеральная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	1000	1200	1400
N_i	1000	6000	3000

Найдите генеральную среднюю $\bar{x}_г$ и генеральную дисперсию $D_г$.

4. Найдите выборочную среднюю по следующим данным: а) длина крыла у 6 пчел (мм): 9,68; 9,81; 9,77; 9,60; 9,61; 9,55; б) длина листьев садовой земляники (см): 5,2; 5,6; 7,1; 6,6; 8,6; 8,2; 7,7; 7,8.

5. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	4	7	10	15
n_i	10	15	20	5

Найдите выборочные среднюю $\bar{x}_в$ и дисперсию $D_в$.

6. По выборке объема $n = 51$ найдена выборочная дисперсия $D_в = 5$. Найдите исправленную дисперсию.

В следующих трех заданиях даны: среднее квадратическое отклонение, выборочная средняя и объем выборки нормально распределенного признака генеральной совокупности. Найдите доверительные интервалы для оценки генеральной средней $\bar{x}_г$ с заданной надежностью.

7. $\sigma = 3$; $\bar{x}_в = 4{,}1$; $n = 36$; $\gamma = 0{,}95$.

8. $\sigma = 2$; $\bar{x}_в = 5{,}4$; $n = 10$; $\gamma = 0{,}95$.

9. $\sigma = 3$; $\bar{x}_в = 20{,}12$; $n = 25$; $\gamma = 0{,}99$.

В следующих трех заданиях даны: «исправленные» среднее квадратическое отклонение, выборочная средняя и объем выборки нормально распределенного признака генеральной совокупности. Найдите, пользуясь распределением Стьюдента, доверительные интервалы для оценки генеральной средней $\bar{x}_г$ с заданной надежностью.

10. $s = 0{,}8$; $\bar{x}_в = 20{,}2$; $n = 16$; $\gamma = 0{,}95$.

11. $s = 1{,}5$; $\bar{x}_в = 16{,}8$; $n = 12$; $\gamma = 0{,}95$.

12. $s = 2{,}4$; $\bar{x}_в = 14{,}2$; $n = 9$; $\gamma = 0{,}99$.

13. По данным девяти независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметическое результатов отдельных измерений $\bar{x}_в = 42{,}319$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение

$s = 5$. Требуется оценить истинное значение a измеряемой величины с надежностью 0,95.

14. По 15 равноточным измерениям найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}12$. Найдите точность измерений σ с надежностью 0,99.

15. По данным 16 независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметическое результатов отдельных измерений $\bar{x}_в = 23{,}161$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}4$. Требуется оценить истинное значение a измеряемой величины и точность измерений σ с надежностью 0,95.

В следующих двух заданиях при уровне значимости 0,05 проверьте гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты.

16.

Эмпирические частоты	6	12	16	40	13	8	5
Теоретические частоты	4	11	15	43	15	6	6

17.

Эмпирические частоты	5	13	12	44	8	12	6
Теоретические частоты	2	20	12	35	15	10	6

18. Найдите выборочное уравнение прямой регрессии Y на X по данным следующей таблицы:

x_i	23,0	24,0	24,5	24,5	25,0	25,5	26,0	26,0	26,5	26,5	27,0	27,0	28,0
y_i	0,48	0,50	0,49	0,50	0,51	0,52	0,51	0,53	0,50	0,52	0,54	0,52	0,53

19. По данным таблицы, приведенной в предыдущем задании, найдите выборочное уравнение прямой регрессии X на Y.

Глава 11

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Здесь рассмотрены начальные понятия дискретной или конечной математики, т.е. математики, не связанной с понятиями бесконечности, предела и непрерывности. Дискретная математика имеет широкий спектр приложений, прежде всего в областях, связанных с информационными технологиями и компьютерами, а также в других областях, например в теории вероятностей (см. гл. 8).

11.1. Начала теории множеств

1. Понятие множества. ***Множество*** — это совокупность, собрание каких-либо объектов, объединяемых общим признаком или свойством. Эту фразу нельзя рассматривать как определение понятия «множество», так как в ней слово «множество» заменено столь же неопределенным термином «совокупность». Так, можно говорить о множестве всех студентов данного курса, о множестве телевизоров с цветным изображением в данной аудитории, о множестве всех натуральных чисел и т.д. Объекты, входящие в данное множество, будем называть *элементами* множества.

Множества будем обозначать прописными (большими) латинскими буквами $A, B, C, \dots, X, Y, \dots$, а их элементы — малыми буквами $a, b, c, \dots, x, y, \dots$.

Если элемент a является элементом множества A, то пишут $a \in A$ (читается «a принадлежит A», или «a из A»). В этом случае говорят также, что «a содержится в A», «a входит в A» и т.п.

Если a не является элементом множества A, то будем писать $a \overline{\in} A$ («a не принадлежит A» или «a не содержится в A» и т.д.).

Если элементами множества являются числа, то оно называется *числовыми*.

Многие из числовых множеств имеют специальные названия и обозначения. Таковы, например, сегмент, или отрезок $[a, b]$, полуинтервалы $[a, b)$ и $(d, b]$ (см. подразд. 2.1, п. 1).

Множество всех целых положительных чисел 1, 2, 3, ... n, ... называют *натуральным рядом* и обозначают N.

Множество всех действительных чисел обозначают R_1 или $(-\infty, +\infty)$ (см. подразд. 2.1, п. 1).

Если множество содержит лишь конечное число элементов, то оно называется *конечным*. В противном случае множество называется *бесконечным*. Например, множество листьев на дереве или множество слушателей в данной аудитории — конечные множества; множество точек на плоскости — бесконечное множество. Числовые множества N, R_1, $[a, b]$ (при $a \neq b$) также бесконечны.

Существуют разные формы задания множества. Наиболее простая состоит в указании всех элементов множества. Так, запись $A = \{1, 2, 3\}$ означает, что множество A состоит из трех элементов 1, 2 и 3. Если число элементов бесконечно, то используется многоточие. Например, множество всех натуральных чисел записывается так: $N = \{1, 2, 3, ...\}$. Иной способ задания множества состоит в описании элементов определяющим свойством $P(x)$ (формой от x), общим для всех элементов $A = \{x: P(x)\}$. Например, $A = \{x: x = 2k, k = 1, 2, ...\}$ означает, что множество A состоит из четных положительных целых чисел 2, 4, 6, ...

Если множества A и B состоят из одних и тех же элементов, т.е. если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества В B является элементом множества A, то множества A и B *равны* (*тождественны*, *совпадают*). Таким образом, множество однозначно определяется своими элементами и не может содержать одинаковых элементов. Если множества A и B равны, то пишут $A = B$. Например, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Пусть теперь имеются два множества A и B, относительно которых известно только, что каждый элемент множества B является элементом множества A. В этом случае говорят, что B есть *подмножество* A, и пишут $B \subset A$ ($\subset$ *знак включения*). Говорят еще, что «A содержит B» или «B включено в A». В частности, B может совпадать с A.

Пример 11.1. Множество четных чисел есть подмножество множества целых чисел.

Теорема 11.1. *Если $B \subset A$ и $A \subset B$, то $A = B$.*

Доказательство. Из $B \subset A$ следует, что любой элемент из B является элементом множества A, а из $A \subset B$ — что любой элемент из A является элементом множества B, т.е. множества A и B состоят из одних и тех же элементов и, значит, $A = B$.

Обычно приходится рассматривать множества A, B, С и т.д., которые являются подмножествами некоторого достаточно обширного множества, рамки которого определяются целями нашего исследования. Такое исходное множество называется *универсальным* и обозначается через I. Если изучаются всевозможные числовые множества, то универсальным будет множество всех действительных чисел.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*. Его обозначают $\varnothing$. Примерами пустого множества могут служить: множество людей на Солнце, множество действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Теорема 11.2. *Пустое множество является подмножеством любого множества A.*

Доказательство. Из определения подмножества следует, что B является подмножеством A, если B не содержит элементов, не являющихся элементами A. Но пустое множество не содержит ни одного элемента, поэтому оно не содержит и элементов, не принадлежащих A. Отсюда следует, что пустое множество есть подмножество любого множества A.

2. Операции над множествами. Пусть даны два множества A и B.

Определение 1. *Объединением* (или *суммой*) этих множеств называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.

Обозначается: $C = A \cup B$ (или $C = A + B$). Знак «$\cup$» называется знаком объединения.

На рис. 11.1 изображены два множества точек плоскости: круг A и круг B. Их объединение — это область, покрытая или горизонтальной, или вертикальной штриховкой.

Заметим, что $A \cup A = A$. В общем случае $A \subset A \cup B$ так же, как и $B \subset A \cup B$.

Пример 11.2. $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Определение 2. *Пересечением* (или *произведением*) множеств A и B называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B.

Обозначается: $C = A \cap B$ (или $C = AB$). Знак $\cap$ называется знаком пересечения. На рис. 11.1 пересечение множеств A и B — это область покрытая и горизонтальной, и вертикальной штриховкой.

Заметим, что $A \cap A = A$. В общем случае $(A \cap B) \subset A$ и $(A \cap B) \subset B$.

Пример 11.3. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.

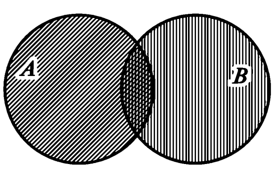


Рис. 11.1

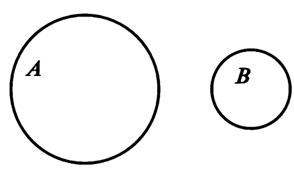


Рис. 11.2

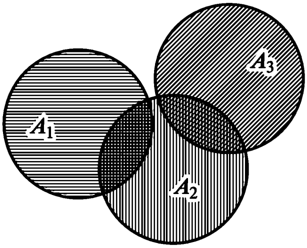


Рис. 11.3

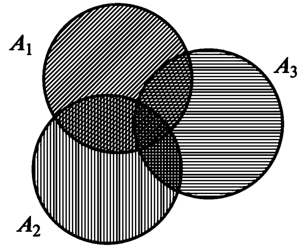


Рис. 11.4

Для некоторой пары множеств может оказаться, что их пересечение — пустое множество. Так, например, $\{1, 2, 3\} \cap \{5, 6, 7\} = \varnothing$. Пустым будет и пересечение множеств A и B, изображенных на рис. 11.2.

Множества, пересечение которых пусто, называются *непересекающимися*.

Введенные операции объединения и пересечения множеств легко обобщаются на большее чем два число множеств. Так, множество С называется объединением множеств $A_1, A_2, ..., An$, если C состоит из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_k, $k = 1, 2, ... , n$. Обозначается $C = A_1 \cup A_2 \cup ... A_n$, или кратко $C = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. На рис. 11.3 изображено объединение множеств A_1, A_2, A_3 (вся заштрихованная область).

Аналогично множество C называется пересечением или общей частью множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, если оно состоит из всех тех элементов, которые принадлежат всем множествам A_k $k = 1, 2, ..., n$. Обозначается $C = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ или кратко $C = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.

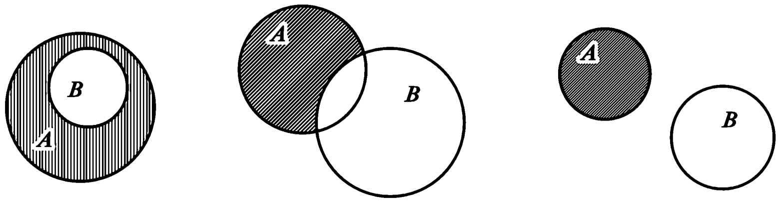
На рис. 11.4 пересечение множеств A_1, A_2, A_3 — область, покрытая тройной штриховкой.

Введем еще одну операцию — вычитание множеств. Пусть имеются два множества A и B.

Определение 4. ***Разностью множеств** A и B **называется совокупность тех элементов множества** A, **которые не являются элементами множества** B.*

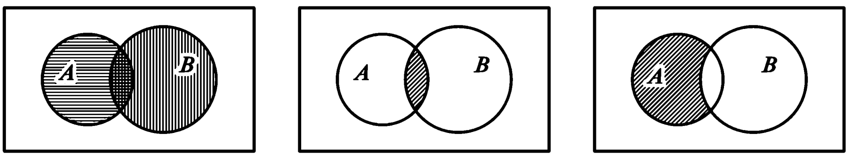
Разность множеств A и B обозначается $A \backslash B$. При этом B может содержаться в множестве A полностью, частично или совсем не включаться. На рис. 11.5, *а — в* изображены эти три случая. Разность $A \backslash B$ каждый раз заштрихована. Заметим, что в последнем случае, т.е. когда $A \cap B = \varnothing$, разность $A \backslash B = A$. В общем случае $A \backslash B \subset A$.

Если $A \subset B$, то разность $A \backslash B$ называется *дополнением* множества A до множества B. Дополнение некоторого множества A до универсального множества U обозначается $\bar{A}$. Таким образом, если $A \subset B$,



а *б* *в*

Рис. 11.5



$A \cup B$ $A \cap B$ $A \setminus B$

а *б* *в*

Рис. 11.6

то U можно представить в виде объединения двух непересекающихся множеств:

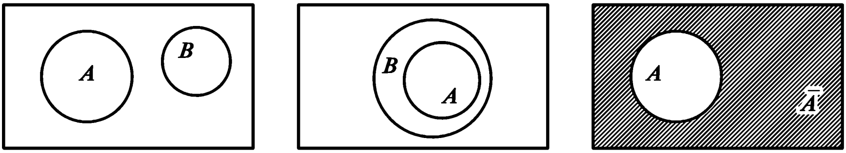
$$U = A \cup \bar{A}.$$

Говорят при этом, что множество U *разбито* на два множества на A и $\bar{A}$. Аналогичному *разбиению* можно подвергнуть множество A, или множество $\bar{A}$, или то и другое. При этом мы получим более мелкое разбиение исходного множества U. Этот процесс можно продолжить и далее. В итоге получим представление множества U в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств:

$$U = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \text{ где } A_i \cap A_j = \varnothing, \text{ если } i \neq j.$$

Для наглядного изображения соотношений между подмножествами какого-либо универсального множества используют диаграммы Эйлера-Венна[1]. Само универсальное множество I, изображают в виде прямоугольника, а его подмножества — в виде кругов, расположенных внутри прямоугольника. Множества, полученные в результате операций над множествами A и B, изображены на рис. 11.6, *а*—*в* заштрихованными областями. Непересекающиеся множества, изображаются неперекрывающимися областями (рис. 11.7, *а*), а включение множества соответствует области, целиком располагающейся внутри другой (рис. 11.7, *б*). Дополнение множества A (до I), т.е. мно-

[1] Джон Венн (1834—1923) — английский математик.



$A \cap B = \varnothing$ $\qquad$ $A \subset B$ $\qquad$ $\bar{A}$

а $\qquad$ *б* $\qquad$ *в*

Рис. 11.7

жество $\bar{A}$ изображается той частью прямоугольника, которая лежит за пределами круга, изображающего A (рис. 11.7, *в*).

3. Булева алгебра. Введенные операции объединения, пересечения и вычитания множеств подчиняются простым законам. Некоторые из этих законов уже установлены ранее, другие также нетрудно устанавливаются. Приведем сводку этих законов:

1. $\bar{\bar{A}} = A$;
2. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;
3. $A \cup \bar{A} = I$, $A \cap \bar{A} \varnothing$;
4. $A \cup I = I$, $A \cap I =;A$
5. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$;
6. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (закон де Моргана),
   $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (закон де Моргана);
7. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность $\cup$),
   $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность $\cap$)
8. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность $\cup$),
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность $\cap$)
9. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$);
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$).

Проверим для примера закон де Моргана $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда $x \in I$ и $x \overline{\in} A \cup B$. Следовательно, $x \overline{\in} A$ и $x \overline{\in} B$. Отсюда $x \in \bar{A}$ и $x \in \bar{B}$ и потому $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Таким образом,

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}. \tag{11.1}$$

Если теперь $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, то $x \in \bar{A}$ и $x \in \bar{B}$. Отсюда $x \in I$ и $x \overline{\in} A$, $x \overline{\in} B$. Значит, $x \overline{\in} A \cup B$, т.е. $x \in \overline{A \cup B}$. Итак,

$$\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}. \tag{11.2}$$

Включения (11.1) и (11.2) в силу теоремы 11.1 и доказывают закон де Моргана.

Пользуясь операциями объединения, пересечения и вычитания множеств, можно из некоторых исходных множеств A, B, C и т.д. получать новые множества: $(A \cup B) \cap \bar{C}$, $(A \setminus \bar{B}) \cup (\bar{A} \setminus C)$ и т.д. К этим множествам можно применять указанные операции и получать еще более сложные выражения и т. д. Законы 1 — 9 позволяют преобразовывать эти выражения, упрощать их, из одних получать другие. Таким образом, получаем исчисление множеств, или алгебру множеств. Это исчисление является примером так называемой *булевой* алгебры, или алгебры *Буля*.

4. Отображения множеств. Пусть имеются два множества D и E. Это могут быть множества совершенно различной природы. Например, может быть, что D — это множество людей, населяющих земной шар, а E — шкала цветов.

Предположим, что существует правило, по которому каждому элементу из D ставится в соответствие определенный элемент из E. Тогда это правило называют *отображением множества* D в E (рис. 11.8).

Например, каждому человеку земного шара можно поставить в соответствие цвет его волос. Так будет определено отображение множества людей в шкалу цветов. Подобно этому можно определить отображение множества людей в множество имен, множества книг в множество языков и т. д. Вместо слова «отображение» говорят также «*функция*» и, если задано отображение множества D в E, то говорят, что *на множестве D задана (определена) функция со значениями в E*. Для обозначения функции мы будем, как правило, использовать букву f. Эта договоренность не помешает нам при нужде использовать и другие буквы g, h, F, G и т. п.

Если на множестве D определена некоторая функция f со значениями в E, то общий элемент множества D обозначается обычно x и называется *независимой переменной* или *аргументом* этой функции, а отдельные конкретные элементы множества D называются *значениями аргумента*. Значения аргумента часто обозначают той же буквой, что и сам аргумент, с прибавлением каких-либо индексов, например, x_0, x_1, $\tilde{x}$ и т. п. Элемент из E, соответствующий элементу $x \in D$, в силу правила f называется *значением функции f* на элементе x и обозначается $f(x)$ (читается: «эф от икс»).

Множество D называется *областью определения* функции f. Множество всех элементов $f(x)$, соответствующих элементам $x \in A$, где A — произвольное подмножество множества D называется *образом* множества A и обозначается $f(A)$. В частности, $f(D)$ называется *областью значений* функции f. Область значений $f(D)$ есть подмножество множества E, которое в общем случае может и не совпадать со всем E. Если же $f(D) = E$, то говорят, что f есть отображение D на E.

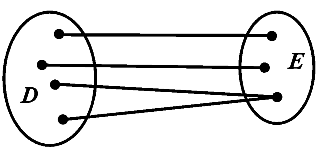


Рис. 11.8

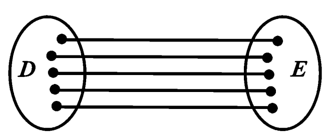


Рис. 11.9

Две функции f и g равны (тождественны, совпадают), если совпадают их области определения, и если для любого x из области определения имеет место равенство

$$f(x) = g(x).$$

Если *разным* элементам $x \in D$, соответствуют *разные* элементы $f(x) \in E$, то отображение f, называют ***взаимно однозначным*** (рис. 11.9).

Примером взаимно однозначного отображения является паспортная система. Каждому человеку, достигшему 14 лет, ставится в соответствие определенный набор паспортных данных (фамилия, имя, отчество, год и место рождения, место жительства и т. п.), записанных в его паспорте. При этом разным людям соответствуют разные паспортные данные.

Если f взаимно однозначное отображение, то каждому элементу $Y \in f(D)$ можно поставить в соответствие определенный элемент $x \in D$, именно тот, значение функции на котором равно y. Так будет установлено отображение образа $f(D)$ на множество D. Это отображение называется *обратным* по отношению к f и обозначается f^{-1}.

Если образ $f(D)$ есть подмножество множества D то говорят, что функция f отображает ***D в себя***. Например, функция $f = \sin x$ отображает все множество действительных чисел на подмножество этого множества — промежуток $[-1, 1]$.

11.2. Комбинаторика

1. Метод математической индукции. Любое конечное множество можно задать перечислением его элементов $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$. До сих пор нас не интересовал *порядок* следования элементов, и, например множества $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_p\}$ и $\{a_2, a_1, a_3, ..., a_p\}$ мы не различали. В дальнейшем нам будет важен порядок, в котором записаны элементы. Множество, в котором задан порядок следования элементов, называется *упорядоченным*. Таким образом, если множество упорядочено, то каждому элементу приписан свой номер, и можно говорить «первый элемент», «второй элемент» и т.д. Можно сказать также, что в упорядоченном множестве каждому элементу отведено место, на котором он помещается среди других элементов этого множества.

Теорема (Метод математической индукции). *Если* 1) ***некоторое утверждение справедливо для*** $k = 1$, 2) ***из справедливости утверждения для произвольного натурального*** k ***следует его справедливость для*** $k + 1$, ***то это утверждение справедливо для всякого натурального*** n.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что при выполнении обоих условий для некоторых натуральных чисел наше утверждение не выполняется. Пусть m — наименьшее из этих чисел. Это значит, что, во-первых, $m > 1$, и, во-вторых, для $m - 1$ наше утверждение выполняется, а для m — уже нет. Но это противоречит второму условию. Следовательно, числа m с указанным свойством не существует. Метод математической индукции доказан.

Пример 11.4. Доказать, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \tag{11.3}$$

Доказательство. 1. При $n = 1$ эта формула справедлива, так как $1^2 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$.

2. Допустим, что равенство (11.3) справедливо при $n = k$, т.е.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Тогда при $n = k + 1$ имеем

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 =$$

$$= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = (k+1)^2\frac{(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Формула (11.3) оказалась верной и при $n = k + 1$, следовательно, она верна при всяком натуральном n.

2. Слова. Рассмотрим конечное множество первых k натуральных чисел $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ и какое-нибудь конечное множество $A = \{a, b, c, \ldots, v\}$. Множество A будем называть *алфавитом*, а число элементов в множестве A *мощностью* этого множества.

Определим отображение φ на множестве D со значениями в A, т.е. каждому натуральному числу $i \in D$, поставим в соответствие один определенный элемент $\varphi(i) \in A$. Последовательность $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(k)$ назовем *словом длины k*.

По-иному можно сказать, что у нас имеется упорядоченный набор мест $1, 2, \ldots, k$, и чтобы образовать слово, мы на каждое место помещаем определенный правилом φ элемент из алфавита A.

В дальнейшем, образуя слова, для простоты написания не будем разделять запятыми элементы $\varphi(i)$ в нем. Точно так же образуются слова, которыми пользуемся в нашей речи. Например, из алфавита $A = \{а, б, р\}$ можно образовать слова длины 2: *ба*, *ар*, *бр*, *ра*; слова длины 3: *бра*, *бар*, *раб*, *брр*; слова длины 4: *баба*, *арба*, *раба*, *араб* и т.д. Аналогично из алфавита $A = \{0, 1\}$ можно образовать два слова единичной длины: 0 и 1, слова длины 2: 00, 01, 10, 11; слова длины 3: 000, 001, 010 и т.п.; слова длины 5: 00101, 10001, 10101 и т.д.

Слово длины k будем называть также *k-буквенным словом*, а элементы алфавита — *буквами*. Уже из приведенных примеров видно, что длина слова k может быть и меньше и больше мощности алфавита. Даже в русском языке, алфавит которого состоит из 33 букв, есть слова, длина которых больше 33. Например, научное название акрихина — метоксихлордиэтиламинометилбутиламиноакридин. Это слово содержит 44 буквы.

Два слова, образованные из одного алфавита, одинаковы тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую длину, и на одинаковых местах стоят одинаковые буквы. Сколько всевозможных слов заданной длины k можно образовать из алфавита мощности n, если считать, что все такие слова имеют смысл?

Теорема 11.3. *Число всевозможных слов длины k, образованных из алфавита мощности n, равно n^k.*

Доказательство. Пусть a_1 a_2, ..., a_n — элементы алфавита A мощности n. Из этого алфавита можно образовать n различных слов длины 1. Такими словами будут буквы алфавита. Если к каждому из этих слов приписать последовательно каждый из n элементов множества A, то образуются все возможные слова длины 2:

$$\begin{array}{l} a_1a_1,\ a_1a_2,\ \ldots,\ a_1a_n, \\ a_2a_1,\ a_2a_2,\ \ldots,\ a_2a_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_na_1,\ a_na_2,\ \ldots,\ a_na_n, \\ a_na_1,\ a_na_2,\ \ldots,\ a_na_n. \end{array}$$

Число таких пар равно n^2 (число элементов в квадратной матрице $n \times n$). Таким образом, наша теорема выполняется для случаев $k = 1$ и $k = 2$.

Предположим теперь, что теорема верна для $i = k - 1$. Это значит, что число различных слов длины $k - 1$, образованных из $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ равно n^{k-1}. Покажем тогда, что теорема остается верной и для $i = k$.

Чтобы из множества A образовать все возможные слова длины k, достаточно к каждому слову длины $k - 1$ приписать на последнее место последовательно каждый из n элементов множества A. Таким образом, каждое слово длины $k - 1$ даст n различных слов длины k, и этим способом мы получим все возможные слова длины k. Поскольку слов длины $k - 1$ имеется n^{k-1}, то общее число слов длины k будет равно $n \cdot n^{k-1} = n^k$.

Например, из алфавита $A = \{0, 1\}$ можно образовать $2^2 = 4$ двубуквенных слова. Они уже были перечислены: 00, 01, 10 и 11.

3. Размещения и перестановки. Образуя слова из алфавита $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, мы требовали от функции φ только однозначности. Пусть теперь φ — взаимнооднозначное отображение. Это значит, что в слове, образованном с помощью значений этого отображения, нет одинаковых букв. Такие слова называются *размещениями*. Например, из алфавита $A = \{1, 0\}$ можно образовать только два размещения длины 2: 01 и 10. Из алфавита $A = \{1, 2, 3\}$ можно образовать шесть различных размещений длины 2: 12, 21, 13, 31, 23 и 32. Нетрудно установить число различных размещений для данного алфавита и в общем случае. Заметив, что длина размещения не может быть больше мощности алфавита, покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 11.4. *Число различных размещений длины k, образованных из алфавита мощности n, равно* $n(n-1)(n-2)\ ...,\ (n-k+1)$.

Доказательство. В самом деле, для $k = 1$ теорема верна, так как число однобуквенных размещений равно числу букв в алфавите, т.е. n.

Пусть теорема верна для $i = k - 1$. Это значит, что число размещений длины $k - 1$, образованных из алфавита $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ равно $n(n-1)(n-2)\ ...\ (n-k+2)$. Но чтобы получить все размещения длины k, достаточно к каждому размещению длины $k - 1$ приписать поочередно одну из $n - (k - 1)$ букв, не вошедших в это размещение. Таким образом, каждое размещение длины $k - 1$ порождает $n - (k - 1)$ размещений длины k. Следовательно, всего размещений длины k будет

$$n(n-1)...(n-k+2)[n-(k-1)],$$

что и требовалось доказать.

Число различных размещений длины k, образованных из алфавита мощности n, обозначают A_n^k. Таким образом, было доказано, что

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1). \tag{11.4}$$

Нетрудно убедиться, что это число равно отношению

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{11.5}$$

Частным случаем размещений являются ***перестановки***. Так называются размещения, длина которых равна мощности алфавита. Например, из алфавита $A = \{1, 2, 3\}$ можно образовать шесть различных перестановок: 123, 132, 213, 231, 312 и 321.

Из формулы (11.4) при $k = n$ получаем, что число всевозможных перестановок, которые можно образовать из алфавита мощности, равно

$$n(n-1)...(n-n+2)(n-n+1) = n!$$

4. Сочетания. Пусть опять имеется некоторое конечное множество мощности n $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Любое подмножество этого множества, содержащее k элементов, называется ***сочетанием из n элементов по k***.

Понятно, что если $k < n$, то из одного и того же множества A мощности n можно образовать несколько различных сочетаний из n элементов по k. Например, из множества $A = (a_1, a_2, a_3)$ можно образовать три различных подмножества, содержащих по два элемента, т.е. три различных сочетания из трех элементов по два: $A_1 = \{a_1, a_2\}$, $A_2 = \{a_1, a_3\}$ и $A_3 = \{a_2, a_3\}$.

Понятно также, что число различных сочетаний из n элементов по k зависит от мощности сочетания, т.е. от k, и от мощности множества A, т.е. от n. Это число обозначают символом C_n^k (иногда употребляется еще символ $\binom{n}{k}$). Например, C_n^1 — число различных сочетаний, взятых из n элементов по одному. Ясно, что таких сочетаний будет столько, сколько элементов в исходном множестве A, т.е. n. Таким образом, $C_n^1 = n$.

Далее, C_n^2 — это число различных сочетаний, взятых из n элементов по два. Это число легко подсчитать. Если каждый элемент множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ поочередно сочетать с каждым из всех остальных, то получатся пары элементов (сочетание из n по 2), из которых можно составить таблицу:

$$\{a_1, a_2\}\{a_1, a_3\}...\{a_1, a_n\},$$

$$\{a_2, a_1\}\{a_2, a_3\}...\{a_2, a_n\},$$

$$...............................$$

$$\{a_{n-1}, a_1\}\ \{a_{n-1}, a_2\}...\{a_{n-1}, a_n\},$$

$$\{a_n, a_1\}\{a_n, a_2\}...\{a_n, a_{n-1}\}.$$

В этой таблице $n - 1$ столбец и n строк. Следовательно, всего выписано $n(n - 1)$ пар. Но каждая пара встречается дважды. Так, например, пара $\{a_1, a_2)$ один раз получается, когда мы a_1 сочетаем с a_2, а второй раз — при сочетании a_2 с a_1. Таким образом, различных пар, т.е. различных сочетаний из n элементов по 2, будет $\frac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. В частности, $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$, в чем мы убедились непосредственно.

Подсчитаем еще C_n^n и C_n^0. Число C_n^n — это число сочетаний из n элементов по n. Единственным подмножеством множества A, содержащим n элементов, будет само множество A. Следовательно, $C_n^n = 1$. Наконец, C_n^0 — число подмножеств, содержащих 0 элементов, т.е. не содержащих элементов вовсе. Таким подмножеством является только пустое множество (оно содержится во всяком множестве, следовательно, и в A). Таким образом, $C_n^0 = 1$.

Теперь докажем теорему, которая позволит подсчитать любое C_n^k.

Теорема 11.5. *Число сочетаний из n элементов по k, где* $0 \le k \le n$, *выражается формулой*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{11.6}$$

или (при $k \ne 0$*)*

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}. \tag{11.7}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы сообразим, что для того чтобы получить всевозможные размещения длины k из алфавита мощности n, достаточно взять всевозможные сочетания из n по k, а затем из каждого сочетания образовать $k!$ всевозможных перестановок. Таким образом,

$$A_n^k = C_n^k k!,$$

откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!},$$

что вместе с (11.4) и (11.5) доказывает теорему.

11.3. Высказывания

1. Понятие высказывания. Предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно, называется *высказыванием*.

Высказываниями являются, например, следующие предложения: «$3\times 3 = 9$», «7 — простое число», «Волга впадает в Черное море». Первые два предложения истинны, а третье — ложно.

Существуют предложения, относительно содержания которых в настоящий момент неизвестно, истинно оно или ложно. Так, например, предложение «Существуют внеземные цивилизации» является высказыванием несмотря на то, что в настоящее время неизвестно, существуют ли в действительности внеземные цивилизации. Однако ясно, что это утверждение либо истинно, либо ложно, поэтому оно является высказыванием. Предложение «В романе Л. Н. Толстого “Война и мир” 3 851 385 букв» также является высказыванием, хотя, вероятно, никто не знает, истинно оно или ложно (но абсолютно точно известно, что оно либо истинно, либо ложно).

Единственным существенным признаком высказывания является то, что оно либо истинно, либо ложно, но не может быть истинным и ложным одновременно.

Обычно высказывания обозначают маленькими буквами латинского алфавита: p, q, x, y и т. д.

Не всякое предложение является высказыванием. Так, предложения «Который час?», «Да здравствуют музы!» (как и всякие вопросительные или восклицательные предложения) не являются высказываниями.

В логике высказываний интересуются не содержанием, а *истинностью* или *ложностью* высказываний (т. е. их *истинным значением*). Истинностные значения — *истина* и *ложь* — будем обозначать соответственно И и Л.

Грамматическими средствами в разговорном языке из нескольких простых высказываний можно составить сложное (составное) высказывание. Например, с помощью союзов «и», «или» и частицы

Таблица 11.1

p	$\bar{p}$
Л	И
И	Л

или

Таблица 11.2

p	$\bar{p}$
0	1
1	0

«не» можно из простых высказываний «Москва стоит на берегу Оби» (ложного) и «Новосибирск стоит на берегу Оби» (истинного) составить следующие сложные высказывания: «Москва не стоит на берегу Оби», «Москва стоит на берегу Оби или Новосибирск стоит на берегу Оби», «Москва стоит на берегу Оби и Новосибирск стоит на берегу Оби». Первые два высказывания истинны, а последнее — ложно.

2. Операции над высказываниями. Рассмотрим логические операции над высказываниями, при которых истинностные значения составных высказываний определяются только истинностными, значениями составляющих высказываний, а не их смыслом.

Отрицанием высказывания p называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание p ложно.

Отрицание p обозначается через $\bar{p}$ и читается как «не p». Отрицание высказывания определяется также таблицей истинности (табл. 11.1 или 11.2).

Здесь цифрами 1 и 0 обозначены соответственно истинность и ложность высказывания.

Конъюнкцией двух высказываний p и q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

Конъюнкция высказываний p и q обозначается через $p \wedge q$ и читается так: «p и q». Конъюнкция определяется также таблицей истинности (табл. 11.3).

В разговорной речи конъюнкции соответствует соединение высказываний союзом «И».

Дизъюнкцией двух высказываний p и q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Дизъюнкция высказываний p и q обозначается через $p \vee q$ и читается как «p или q». Дизъюнкция определяется также таблицей истинности (табл. 11.4).

Таблица 11.3

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Таблица 11.4

p	q	$p \vee q$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Таблица 11.5

p	q	$p \to q$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Таблица 11.6

p	q	$p \sim q$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

В разговорной речи дизъюнкция соответствует соединению высказываний союзом «или» в неразделительном смысле.

Импликацией двух высказываний p и q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда p истинно, а q ложно.

Импликация высказываний p и q обозначается через $p \to q$ и читается как «p влечет q» (или иначе, «если p, то q», «из p следует q»). Высказывание p называется посылкой импликации, а высказывание p — заключением импликации. Импликация определяется также таблицей истинности (табл. 11.5).

Эквиваленцией (*или эквивалентностью*) двух высказываний p и q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения p и q совпадают.

Эквиваленция высказываний p и q обозначается через $p \sim q$ и читается как «p эквивалентно q». Эквиваленция определяется также таблицей истинности (табл. 11.6).

3. Прямая и обратная теоремы. В каждой теореме должно быть указано:

1) при каких условиях рассматривается в ней тот или иной математический факт (условие теоремы);

2) что об этом факте утверждается (заключение теоремы), Рассмотрим, например, следующую теорему.

Теорема 11.6. *Если четырехугольник — параллелограмм, то его диагонали, пересекаясь, делятся пополам.*

Здесь *условие теоремы* (p): четырехугольник — параллелограмм; *заключение теоремы* (q): точка пересечения диагоналей делит каждую из них пополам.

Чтобы легче выделить условие и заключение теоремы, ее часто формулируют в виде импликации, применяя логический союз «если ... , то ...». Поэтому теорему можно записать в общем виде на языке логики так: $p \to q$.

Доказательство теоремы состоит в том, чтобы показать, что если выполняется условие, то из него логически следует заключение, т. е. приняв, что p истинно, в соответствии с определенными правилами логики показать, что q истинно.

Имея некоторую теорему $p \to q$, из нее можно образовать новую теорему $q \to p$, называемую *обратной* к теореме $p \to q$. В этом случае исходная теорема называется *прямой* теоремой.

Например, обратной теоремой к приведенной выше теореме 11.6 является следующая теорема.

Теорема 11.7. *Если в четырехугольнике диагонали, пересекаясь, делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.*

В данном примере теоремы 11.6 и 11.7 истинны, в чем легко убедиться, проводя доказательство каждой из них.

Однако из справедливости теоремы $p \to q$ не всегда следует справедливость теоремы $q \to p$. Так, справедливо предложение «Если углы вертикальные, то они равны» ($p \to q$), но неверно, что «Если углы равны, то они вертикальные» ($q \to p$). Например, прямые углы равны, но они необязательно будут вертикальные.

4. Необходимое и достаточное условия.

Пример 11.5. Рассмотрим следующие высказывания.

1) Если данное натуральное число четное, то оно делится на шесть.
2) Если данное натуральное число делится на шесть, то оно четное.
3) Если данное натуральное число четное, то оно делится на два.
4) Если данное натуральное число делится на два, то оно четное.

Каждое из этих высказываний можно выразить на языке математической логики:

$$1)\ p_1 \to q_1;\quad 2)\ q_1 \to p_1;\quad 3)\ p_2 \to q_2;\quad 4)\ q_2 \to p_2.$$

Первое высказывание не является истинным, второе, третье и четвертое высказывания истинны.

Формулируя теорему, часто используют термины «достаточно», «необходимо», «достаточно и необходимо».

Условие p называется *достаточным* для заключения q, если из p логически следует q, т.е. истинна теорема $p \to q$.

Условие p называется *необходимым* для заключения q, если из q логически следует p, т.е. истинна теорема $q \to p$.

Условие p называется *достаточным* и *необходимым* для заключения q, если из p логически следует q, а из q логически следует p, т.е. истинны обе теоремы: прямая и ей обратная.

В рассмотренном выше примере p_1 не является условием, достаточным для q_1, так как из p_1, логически не следует q_1, т.е. из истинности p_1 не вытекает истинность q_1, p_2 является достаточным условием для q_2 так как из p_2 логически следует q_2.

Вместе с тем p_1 является условием, необходимым для q_1, так как из q_1 логически следует p_1. Условие p_2 есть условие, достаточное и необходимое для q_2, так как истинны одновременно обе теоремы: $p_2 \to q_2$ и $q_2 \to p_2$, т.е. имеет место $p_2 \sim q_2$.

Возможны случаи, когда:

а) условие p является достаточным для заключения q, но не является необходимым;

б) условие p является необходимым для заключения q, но не является достаточным.

В случае а) из истинности p вытекает истинность q, но истинность q может вытекать и из другого условия. Например, чтобы число было четным, достаточно не только того, что оно делится на шесть, но и того, что оно делится на четыре.

В случае б) из истинности q вытекает истинность p, однако, если p будет истинно, то q все же может оказаться ложным. Например, чтобы число делилось на шесть, необходимо, но недостаточно, чтобы оно было четным; так, число четыре четное, однако оно не делится на шесть.

При употреблении терминов «достаточно», «необходимо», «необходимо и достаточно» вместо слова «условие» часто употребляют слово «признак».

Вместо слов «достаточно и необходимо» часто употребляют также словосочетания: «если и только если», «тогда и только тогда», «в том и только в том случае», «те и только те». Полезно иметь в виду, что рассматриваемые отдельно части этих связок также имеют определенный смысл: например, словосочетания «только в том случае», «только тогда» и т. п. заменяют словосочетание «необходимое условие», а словосочетания «тогда», «в том случае» и т. п. заменяют словосочетание «достаточное условие».

11.4. Булевы функции

1. Булевы функции одной переменной. Будем, как обычно, обозначать независимую переменную символом x. Если независимых переменных несколько, будем их нумеровать: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Рассмотрим возможные функции от переменной $x \in D = \{0, 1\}$ (такая переменная называется *логической переменной*). При этом нас будут интересовать лишь те функции, значения которых лежат также в $D = \{0, 1\}$. Таких функций не много. В самом деле, можно указать, например, степенную функцию: $f(x) = x^n$. Но эта функция в данном случае ничем не отличается от тождественной функции $f(x) = x$, так как значение 0 она переводит в 0, а значение 1 в 1. По-

Таблица 11.7

x	$f(x) = x$
0	0
1	1

Таблица 11.8

x	$f(x) = \bar{x}$
0	1
1	0

Таблица 11.9

x	$f(x) \equiv 1$
0	1
1	1

Таблица 11.10

x	$f(x) \equiv 0$
0	0
1	0

строим таблицу функции $f(x) = x$ (табл. 11.7), для чего слева перечислим значения аргумента (0 и 1), а справа — соответствующие значения функции.

Другой более интересной функцией является отрицание. Эта функция обозначается $\bar{x}$ и читается «*не x*». Она действует следующим образом: если $x = 0$, то $\bar{x} = 1$, и наоборот, если $x = 1$, то $\bar{x} = 0$ (табл. 11.8).

Кроме этих двух функций можно указать еще только две функции, отображающие множество $\{0, 1\}$ в себя. Это постоянные $f(x) \equiv 1$ и $f(x) \equiv 0$ (табл. 11.9 и 11.10).

Других функций от одной логической переменной, отображающих $\{0, 1\}$ в себя, не существует. В самом деле, любая такая функция определяется двумя значениями ($f(0)$ и $f(1)$), причем каждое из этих значений может быть равно либо 0, либо 1. Таким образом, каждая такая функция — это двубуквенное слово $f(0)f(1)$, образованное из $\{0, 1\}$, как из алфавита. Число таких слов, а следовательно, и число интересующих нас функций, равно, как мы знаем, $2^2 = 4$. Ровно столько функций мы и перечислили, а все возможные двубуквенные слова, которые можно образовать из $\{0, 1\}$, записаны в правых частях таблиц (см. табл. 11.7—11.10).

Итак, если x — логическая переменная, то существует только четыре функции $f(x)$, отображающие область определения $D = \{0, 1\}$ в себя: две постоянные, одна тождественная и одна — отрицание. Эти функции называют ***булевыми функциями одного переменного***[1]. Каждую из этих функций можно задать аналитически, т.е. с помощью формул, например $f(x) = \bar{x}$, или таблично.

Заметим еще, что так же, как в непрерывном анализе, одну и ту же функцию можно задать с помощью разных формул. Например, функцию $f(x) \equiv 0$ можно задать и формулой $f(x) \equiv \bar{1}$.

Имея всего четыре функции, трудно построить исчисление, столь же содержательное, как анализ непрерывных функций. Перейдем поэтому к изучению функций, зависящих от нескольких логических переменных, значения которых лежат в $D = \{0, 1\}$. Такие функции называют ***булевыми функциями нескольких переменных***. В этом случае также получим конечное множество функций, но запас их достаточно велик, чтобы построить содержательный математический аппарат.

[1] Джон Буль (1815—1864) — английский ученый.

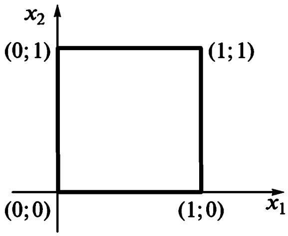


Рис. 11.10

2. Булевы функции двух переменных. Пусть x_1 и x_2 — логические переменные. Рассмотрим функцию от x_1 и x_2:

$$f(x_1, x_2). \tag{11.8}$$

Так как каждая из переменных x_1, x_2 может принимать только два значения: 0 и 1, то областью определения функции (11.8) являются четыре варианта сочетаний: 00, 01, 10 и 11. Приняв эти сочетания за координаты точек на плоскости x_1Ox_2, получим четыре вершины единичного квадрата (рис. 11.10). Таким образом, функцию (11.8) можем считать заданной на множестве вершин единичного квадрата, и это множество она отображает во множество $\{0, 1\}$. Например, функция $f(x_1, x_2)$ может быть равна единице во всех вершинах, кроме начала координат, а в начале координат обращаться в нуль.

Легко найти общее число всевозможных функций $f(x_1, x_2)$ со значениями в $\{0, 1\}$. В самом деле, перенумеруем вершины единичного квадрата в каком-нибудь порядке. В каждой вершине функция $f(x_1, x_2)$ может принимать одно из двух значений: 0 или 1. Задать функцию — значит указать, в каких вершинах она принимает значение 0 и в каких 1. Таким образом, наша функция — это четырехбуквенное слово, образованное из алфавита $\{0, 1\}$. Число таких слов равно $2^4 = 16$. Следовательно, *можно построить только 16 различных функций двух логических переменных со значениями в* $\{0, 1\}$. Перечислим эти функции.

Таблица 11.11

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = 0$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	0

Таблица 11.12

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = 1$
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Таблица 11.13

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1$
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	1

Таблица 11.14

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Таблица 11.15

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = \bar{x}_1$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	0

Таблица 11.16

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = \bar{x}_2$
0	0	1
1	0	1
0	1	0
1	1	0

Таблица 11.17

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Таблица 11.18

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Прежде всего отметим две простейшие функции — постоянные: $\bar{f}(x_1, x_2) \equiv 0$ и $f(x_1, x_2) \equiv 1$ (табл. 11.11 и 11.12).

Еще две тоже очень простые функции: $f(x_1, x_2) = x_1$ и $f(x_1, x_2) = x_2$ (табл. 11.13 и 11.14). Аналогично строятся функции $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1$ и $f(x_1, x_2) = \bar{x}_2$ (табл. 11.15 и 11.16).

Все эти функции уже встречались при рассмотрении функции одной логической переменной. Перейдем теперь к более интересным функциям двух логических переменных.

Конъюнкция. Так называется функция $f(x_1, x_2)$, которая принимает значение, равное единице, тогда и только тогда, когда оба аргумента равны 1 (табл. 11.17). Конъюнкция обозначается $x_1 \wedge x_2$ или x_1x_2, читается «x_1 и x_2»[1]. Легко видеть, что конъюнкцию можно определить также равенством $x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2)$. Таким образом, чтобы конъюнкция была равна нулю, необходимо (и достаточно), чтобы хоть один аргумент был равен нулю.

Дизъюнкция. Так называется функция $f(x_1, x_2)$, которая принимает значение 0 тогда и только тогда, когда оба аргумента равны 0 (табл. 11.18). Дизъюнкция обозначается $x_1 \vee x_2$, и читается «x_1 или x_2». Легко видеть, что дизъюнкцию можно определить равенством $x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$. Таким образом, чтобы дизъюнкция была равна единице, достаточно (и необходимо), чтобы хоть один из аргументов был равен единице.

---

[1] Иногда конъюнкцию обозначают знаком &. До сих пор не установилось единое обозначение и для других функций. Так, например, для отрицания существуют еще два знака.

Таблица 11.19

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Таблица 11.20

x_1	x_2	$x_1 \sim x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Импликация. Эта функция принимает значение 0 тогда и только тогда, когда первый аргумент x_1, равен 1, а второй x_2; равен 0 (табл. 11.19). Обозначается $x_1 \to x_2$ читается «если x_1 то x_2», или «из x_1 следует x_2».

Эквиваленция. Эта функция принимает значение, равное 1, тогда и только тогда, когда оба аргумента принимают одинаковое значение (табл. 11.20). Обозначается $x_1 \sim x_2$, читается «x_1 эквивалентно x_2» или «x_1 равнозначно x_2».

Функция Шеффера, или ***штрих Шеффера.*** Эта функция обращается в нуль тогда и только тогда, когда оба аргумента равны единице (табл. 11.21). Обозначается x_1 / x_2.

Функция Даггера, или ***стрелка Пирса.*** Эта функция обращается в единицу тогда и только тогда, когда оба аргумента равны нулю (табл. 11.22). Обозначается $x_1 \downarrow x_2$.

Исключенное «или». Так называют функцию, которая обращается в единицу, когда либо первый, либо второй аргумент обращается в 1, но не оба вместе. Обозначается $x_1 \nabla x_2$ (табл. 11.23).

Нам осталось рассмотреть еще три функции. Первая функция из этой тройки обозначается $x_1 \leftarrow x_2$ и иногда называется *запретом* (табл. 11.24). Она характерна тем, что принимает значение единицы тогда и только тогда, когда первый аргумент x_1 равен единице, а второй x_2 равен 0. Две другие функции — это запрет и импликация, в которых первым аргументом считается x_2, а вторым x_1 (табл. 11.25 и 11.26).

Итак, перечислены все 16 различных функций двух логических переменных со значениями в $\{0, 1\}$. Каждая функция задана своей таблицей. В левых частях таблиц записаны в одном и том же порядке

Таблица 11.21

x_1	x_2	x_1 / x_2
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Таблица 11.22

x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0

Таблица 11.23

x_1	x_2	$x_1 \nabla x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Таблица 11.24

x_1	x_2	$x_1 \leftarrow x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	0

четыре вершины единичного квадрата, а в правых — все возможные слова длины 4, образованные из {0, 1}.

Кроме того, каждая из 16 функций двух логических переменных имеет свое обозначение. Пользуясь этими обозначениями, мы можем задавать функции аналитически, с помощью формул. Например,

$$f(x_1, x_2) = x_2 \to x_1, f(x_1, x_2) = x_2 \text{ и т. п.}$$

Знаки «~», «∇», «∧» и др. называют *связками*.

На практике неудобно пользоваться полным набором из 16 связок, но в этом нет и необходимости, так как одни связки можно заменять суперпозицией других. В самом деле, наши функции принимают только два значения: 0 и 1. Поэтому они сами могут служить аргументами связок. Так, например, если $y_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $y_2 = f_2(x_1, x_2)$, то можно образовать $y_1 \wedge y_2$ или $y_2 \leftarrow y_1$ и вообще $F(y_1, y_2)$, где F — одна из 16 связок двух логических переменных. Это же можно записать и в развернутом виде: $f_1(x_1, x_2) \wedge f_2(x_1, x_2)$ или $f_2(x_1, x_2) \leftarrow f_1(x_1, x_2)$ и вообще $F(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)$. Выражение $F(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ по своей сути есть функция от x_1 и x_2. Каждому набору значений этих аргументов она ставит в соответствие 0 или 1. По способу получения это — суперпозиция функций или сложная функция. Имея две таких функции, мы и их можем связать какой-нибудь из 16 связок, образуя еще более сложную суперпозицию, например

$$[f_1(x_1, x_2) \wedge f_2(x_1, x_2)] \sim [f_3(x_1, x_2) \leftarrow f_4(x_1, x_2)]$$

и т. п.

Заметим теперь, что сколь бы ни были сложны эти суперпозиции, они задают функции двух логических переменных со значениями

Таблица 11.25

x_1	x_2	$x_2 \leftarrow x_1$
0	0	0
1	0	0
0	1	1
1	1	0

Таблица 11.26

x_1	x_2	$x_2 \to x_1$
0	0	1
1	0	1
0	1	0
1	1	1

в {0, 1}. А таких функций, как мы знаем, всего 16. Следовательно, любая суперпозиция булевых» функций двух переменных задает одну из 16 функций этих переменных. Составляя такую суперпозицию, получаем просто иное аналитическое выражение какой-нибудь из 16 функций.

Предположим теперь, что имеем некоторую сложную функцию. Как узнать какую из 16 функций двух логических переменных она задает? Для этого можно составить таблицу истинности сложной функции и сравнить эту таблицу с таблицами связок. Покажем на примерах, как составляются таблицы сложных функций.

Рассмотрим функцию

$$f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \quad x_2 \wedge \tag{11.9}$$

Составим таблицу истинности так, чтобы слева, как обычно, были два столбика значений аргументов, а справа — столько столбцов, сколько связок указано в функции f (табл. 11.27).

На первом шаге узнаем значения $\bar{x}_1$ по табл. 11.15. На втором шаге из полученного аргумента $\bar{x}_1$ и аргумента x_2 образуем конъюнкцию (см. табл. 11.17). В итоге получаем таблицу значений нашей функции, из которой следует, что в третьей вершине квадрата (в вершине (0, 1)) функция равна единице, а во всех остальных — нулю.

Рассмотрим еще пример:

$$f(x_1, x_2) = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2). \tag{11.9}$$

Составим таблицу истинности этой функции (табл. 11.28). На первых двух шагах найдем $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$. Затем, пользуясь таблицей дизъюнкции (см. табл. 11.18), найдем $\bar{x}_1 \vee x_2$ и $x_1 \vee \bar{x}_2$. Наконец, на пятом шаге найдем конъюнкцию от полученных аргументов $y_1 = (\bar{x}_1 \quad x_2)\vee$ и $y_2 = (x_1 \quad \bar{x}_2)\vee$. В итоговом пятом столбце получим значение нашей функции $f(x_1, x_2)$.

Из приведенных примеров ясен принцип построения таблиц истинности функций, заданных суперпозицией. Эти таблицы строятся последовательно, в порядке следования операций, отделенных друг от друга скобками. Сравнив итоговый столбец построенной таблицы

Таблица 11.27

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1 \wedge x_2$
0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	0
№ шага		1	2

Таблица 11.28

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$(\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$
0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1
№ шага		1	2	3	4	5

с таблицами связок, найдем ту связку, которую задает рассматриваемая суперпозиция. В частности, сравнив табл. 11.25 и заключительный (второй) шаг табл. 11.27, найдем, что

$$\bar{x}_1 \wedge x_2 = x_2 \leftarrow x_1.$$

Аналогично, сравнив табл. 11.20 и заключительный (пятый) шаг табл. 11.28, получим, что

$$(\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1 \sim x_2.$$

Итак, мы показали, что одни связки можно с помощью операции «функции от функции» выражать через другие. Замечательно, что в суперпозициях при этом можно обойтись не всеми, а только некоторыми связками. В самом деле, рассматривая первый из наших примеров, мы установили, что

$$x_2 \leftarrow x_1 = \bar{x}_1 \wedge x_2. \tag{11.10}$$

Таким образом, запрет выражается через отрицание и конъюнкцию. Точно так же, конструируя таблицу во втором примере, мы, между прочим, установили (см. третий шаг табл. 11.28), что

$$x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2. \tag{11.11}$$

Это значит, что импликация может быть выражена через отрицание и дизъюнкцию. Наконец, из итогового столбца табл. 11.28 следует, что

$$x_1 \sim x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2). \tag{11.12}$$

Далее из простого сравнения таблиц функций легко получить тождества

$$x_1 / x_2 = \overline{x_1 \quad x_2} \tag{11.13}$$

(см. табл. 11.17 и 11.21),

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} \tag{11.14}$$

(см. табл. 11.18 и 11.22),

$$x_1 \nabla x_2 = \overline{x_1 \sim x_2} \tag{11.15}$$

(см. табл. 11.20 и 11.23).

Заметим еще, что отрицание тождественного нуля есть тождественная единица. Отсюда и из тождеств (11.10) — (11.15) следует теорема.

Теорема 11.8. *Любую из 16 булевых функций двух переменных можно выразить с помощью суперпозиции, используя только тождественный нуль, отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.*

Указанный набор связок не является минимальным. Можно доказать, что любая из этих 16 функций может быть записана с помощью лишь одного знака Шеффера или только одной стрелки Пирса. Однако при вычислении удобнее пользоваться четырьмя связками, указанными в теореме.

3. Элементарные тождества. Тождественные преобразования. Мы уже не раз говорили о том, что одну и ту же булеву функцию можно задавать различными формулами. Например, тождественный нуль можно задать двумя формулами: $f(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv \bar{1}$. Две формулы были получены и для импликации:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2 \text{ и } f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \quad xy.$$

Если две формулы задают одну и ту же функцию, то равенство этих формул называется *тождеством*. Таким образом, мы имеем тождества

$$0 = \bar{1},$$

$$\bar{x}_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2.$$

Пользуясь подобными тождествами, можно преобразовывать формулы, задающие булевы функции. При этом меняется только аналитическое выражение функции, но не сама функция.

Тождественные преобразования булевых функций базируются на некоторой системе простейших тождеств. Часть из них мы доказали (см. (11.10) — (11.15)), другие так же легко проверить с помощью таблиц. Эти тождества имеют вид:

I. $x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$;

II. $x_1 \sim x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2)$;

III. $\bar{\bar{x}} = x$;

IV. $x \wedge x = x, x \vee x = x$;

V. $x \wedge \bar{x} = 0, x \vee \bar{x} = 1$;

VI. $x \wedge 1 = x, x \vee 1 = 1$;

VII. $x \wedge 0 = 0, x \vee 0 = x$;

VIII. $\overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$;

XI. $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1, x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$;

X. $x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$;

$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$;

XI. $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$;

$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$.

Исчисление булевых функций, построенное на тождествах I—XI, называется *алгеброй логики*.

Пользуясь алгеброй логики, можно составлять всевозможные тождества для булевых функций, преобразовывать сложные функции, упрощать громоздкие формулы и т.д. Упростим, например, формулу $\overline{(x_1 \to x_2) \wedge \bar{x}_2}$. Пользуясь последовательно тождествами VIII, III, I, VIII, IX, XI, V, VI, можем записать:

$$\overline{(x_1 \to x_2) \wedge \bar{x}_2} = \overline{(x_1 \to x_2)} \vee \bar{\bar{x}}_2 = \overline{(x_1 \to x_2)} \vee x_2 = \overline{(\bar{x}_1 \quad x_2)} \quad x_2 =$$

$$= (\bar{\bar{x}}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee x_2 = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee x_2 = x_2 \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) =$$

$$= (x_2 \vee x_1) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_2) = (x_2 \vee x_1) \wedge 1 = x_2 \vee x_1.$$

Таким образом, мы нашли простое выражение заданной функции, уже не прибегая к таблицам, а пользуясь алгеброй логики.

Замечание. В данном учебнике автор ограничился лишь изложением начальных сведений о булевых функциях; достаточно полное их изложение содержится, например, в [16].

Выполните задания

1. Равны ли множества: а) {3; 4; 5; 6} и {5; 4; 3; 6}; б) $\{x\colon x > 0;\ x^2 \le 4\}$ и $\{x\colon 0 < x \le 4 - x\}$; в) $\{x\colon 0 \le x \le 1\}$ и $\{x\colon x^2 \le 1\}$?

2. Вместо знаков «*» напишите знак «$\subset$» или знак «$\in$», чтобы получилась верная запись: а) {5; 6} * {5; 6; 8}; б) 5 * {5; 6; 8}; в) 2 * N.

3. Укажите пустые множества среди следующих множеств:

а) множество целых корней уравнения

$$x^2 - 9 = 0;$$

б) множество целых корней уравнения

$$x^2 + 16 = 0;$$

в) множество целых корней уравнения

$$x^2 - 5x + 6 = 0;$$

г) множество натуральных чисел, меньших единицы.

4. Пусть A = {1; 2; 3; 4; 5; 6} и B = {1; 4; 5; 6; 7; 8}. Найдите множества $A \cup B$ и $A \cap B$.

5. Пусть A = {2; 4; 6; 8; ...; $2n$, ...}, B ={1; 3; 5; 7; ...; $2n - 1$, ...}. Найдите $A \cup B$ и $A \cap B$.

6. Пусть A = {1; 2; 3; 4; 5; 6}, B = {3; 4; 5; 6; 7; 8}. Найдите $S = A \backslash B$.

7. Пусть A = {1; 2; 3; 4, ...} и B = {2; 4; 6; 8, ..., $2n$; ...}. Найдите $A \backslash B$.

8. Выпишите все подмножества множества A = {1; 2; 3}.

9. Пусть

$$A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\},$$
$$B = \{4; 3; 2; 1; 0; -1; -2\},$$
$$C = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Найдите множества: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \cup C$; г) $A \cap C$; д) $B \cup C$.

10. Используя принцип математической индукции, докажите справедливость неравенства

$$2^n \geq n \geq 1$$

для любого натурального n.

11. Используя принципы математической индукции, докажите справедливость равенства

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

для любого натурального n.

12. Нужно присудить первую, вторую и третью премии на конкурсе, в котором принимает участие 20 человек. Сколькими способами можно распределить эти премии?

13. Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова «причем»?

14. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

15. У шести мальчиков в классе имеются признаки инфекционного заболевания. Чтобы проверить наличие заболевания, требуется взять выборочный анализ крови у двух мальчиков. Сколькими способами можно это сделать?

16. Среди следующих предложений выделите высказывания и установите, истинны или ложны.

1) Москва — столица России.
2) А. С. Пушкин — великий русский поэт.
3) Волга впадает в Черное море.
4) Студент биологического факультета педагогического университета.
5) $25 < 10$.
6) $x^2 - 5x + 6$.
7) Пейте виноградный сок!
8) Который час?

17. Среди следующих высказываний укажите простые и составные. В составных высказываниях выделите грамматические связки.

1) Число 36 не делится на 7.
2) Число 18 делится на 6 и на 3.
3) Если число 162 делится на 9, то оно делится и на 3.
4) Число 7 является делителем числа 63.
5) Я пойду в театр или встречу друга.
6) Земля вращается вокруг Солнца.

18. Сформулируйте отрицание следующих высказываний.

1) Число 35 не делится на число 7.

2) $6 > 3$.

3) $4 \le 7$.

4) Кислород — газ.

19. Обозначьте простые высказывания буквами и запишите следующие высказывания с помощью символов алгебры логики.

1) Сегодня понедельник или вторник.

2) Идет дождь или снег.

3) Если идет дождь, то крыши мокрые.

20. Пусть x и y обозначают высказывания: x — «Я учусь в школе»; y — «Я люблю биологию».

Прочтите следующие составные высказывания: ____

1) $\bar{x}$; 2) $\bar{\bar{x}}$; 3) $x \wedge y$; 4) $x \wedge \bar{y}$; 5) $\bar{x} \wedge y$; 6) $\bar{x} \wedge \bar{y}$; 7) $\overline{x \wedge y}$.

21. Пусть x — высказывание «Студент Петров изучает немецкий язык»; y — высказывание «Студент Петров успевает по дискретной математике». Дать словесную формулировку высказываний. 1) $\bar{x} \wedge y$; 2) $x \to y$; 3) $\bar{x} - \bar{y}$.

Составьте таблицы истинности для функций:

22. $f(x,y) = \bar{x} \quad \bar{y}$.

23. $f(x,y) = (x \wedge \bar{y}) \to (\bar{x} \vee y)$.

24. $f(x,y,z) = (x \wedge \bar{y}) \vee z$.

Докажите тождества:

25. $(x \wedge \bar{y}) \vee y = y$.

26. $\overline{x \to y} = x \wedge \bar{y}$.

27. Упростите формулу

$(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \wedge y) \wedge y$.

Глава 12

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ

12.1. Зарождение математики

Математика[1] — наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Она возникла в глубокой древности из практических потребностей людей. В ее истории можно выделить четыре периода:

1) период зарождения математики как самостоятельной научной дисциплины (его начало в глубине веков и продолжение до VI—V в. до н. э.);

2) период элементарной математики — математики постоянных величин (он продолжался до конца XVII в.);

3) период математики переменных величин, характеризующийся созданием и развитием математического анализа, изучением процессов в их движении, развитии (его окончание — первая половина XIX в.);

4) период современной математики, характеризующийся сознательным и математическим изучением возможных типов количественных отношений и пространственных форм. В геометрии изучаются не только реальное трехмерное пространство, но и сходные с ним пространственные формы. В математическом анализе рассматриваются переменные величины, зависящие не только от числового аргумента, но и от некоторой линии (функции), что привело к понятиям функционала и оператора. Алгебра превратилась в теорию алгебраических операций над элементами произвольной природы (начало этого периода относится к первой половине XIX в.).

В Древнем мире математические сведения составляли неотъемлемую часть познания жрецов и государственных чиновников. Запас этих сведений, как можно судить по расшифрованным глиняным вавилонским табличкам и египетским папирусам, был сравнительно велик. Имеются данные, что за 1 тыс. лет до древнегреческого ученого *Пифагора Самосского* в Двуречье не только была известна теорема Пифагора, но и была разрешена задача о розыскании (поис-

[1] Это слово происходит от греческого слова «матема», означающего «знание», «наука».

ке) всех прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами. Однако подавляющая часть документов того времени представляет собой сборники правил для производства простейших арифметических действий, а также вычислений площадей фигур и объемов тел. Сохранились также разного рода таблицы для облегчения этих расчетов. В таких руководствах правила не формулируются, а поясняются на частных примерах.

12.2. Математика постоянных и переменных величин

Превращение математики в формализованную науку с оформившимся дедуктивным методом построения произошло в Древней Греции. Практическая арифметика и геометрия в Древней Греции имели высокий уровень развития. Начало греческой геометрии связывается с именем *Фалеса Милетского* (ок. 625—547 гг. до н. э.), вывезшего первичные знания из Египта. В школе Пифагора Самосского (ок. 570—500 гг. до н. э.) изучалась делимость чисел, были просуммированы простейшие прогрессии, изучались совершенные числа, введены в рассмотрение различные типы средних величин (среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое), вновь найдены пифагоровы числа (тройки целых чисел, которые могут быть сторонами прямоугольного треугольника). В VI—V вв. до н. э. возникли знаменитые задачи древности — квадратура круга, трисекция угла, удвоение куба, были построены первые иррациональные числа.

Первый систематический учебник геометрии приписывается *Гиппократу Хиосскому* (вторая половина V века до н. э.). Наибольшей напряженностью математического творчества отличается III в. до н. э. В этот период работали такие математики, как *Евклид*, *Архимед* (ок. 287—212 гг. до н. э.), *Эратосфен* (ок. 276—194 гг. до н. э.); позднее — *Герон* (годы его рождения и смерти неизвестны; ок. I в. н. э.), *Диофант* (ок. III в. н. э.).

В своих «Началах» Евклид собрал и подверг окончательной логической переработке достижения в области геометрии; вместе с тем он заложил основы теории чисел. Основной заслугой Архимеда в геометрии явилось определение площадей и объемов разных фигур (в том числе площадей сегмента параболы, поверхности шара, объема сегмента шара и параболоида). Диофант исследовал преимущественно решение уравнений в рациональных положительных числах (отрицательных чисел у Диофанта нет).

С конца III в. начался упадок греческой математики.

Значительного развития математика достигла в Древнем Китае и Древней Индии. Китайские математики имели высокую технику вычислений, развивали общие алгебраические методы. Во II—I вв. до н. э. была написана «Математика в девяти книгах». В ней имеются приемы извлечения квадратного корня, которые излагаются и в современной школе, методы решения систем линейных алгебраических уравнений. *Цзу Чун-чжи* (429—500) получил для числа π значение 355/113, дающее 7 верных значащих цифр. Исключительного искусства достигли китайские математики в численном решении уравнений.

Индийской математике, расцвет которой относится к V—XII вв., принадлежит, в частности, заслуга употребления современной десятичной нумерации, а также нуля для обозначения отсутствия единиц разряда.

Арабские завоевания привели к тому, что от Средней Азии до Пиренейского полуострова ученые в течение X—XV вв. пользовались арабским языком. Интенсивные торговые сношения между арабскими территориями, а в некоторых случаях и поддержка со стороны государства научных начинаний, привели к расцвету науки. Среднеазиатский ученый *аль-Хорезми* (787 — ок. 850) впервые изложил алгебру как самостоятельную науку. Азербайджанский ученый *Н. Туси* (1201—1274) широко развил сферическую тригонометрию, глубоко проанализировал пятый постулат Евклида (постулат о параллельных). Самаркандский ученый *Аль-Каши* (ок. 1436—1437) ввел в рассмотрение десятичные дроби и дал их систематическое изложение.

XII—XV вв. в Европе — преимущественно период освоения результатов, полученных в Древнем мире и на Востоке. Необходимость математических знаний ясно осознавалась быстро богатеющей и развивающейся торговой буржуазией. Книгопечатание способствовало распространению математических знаний, а также развитию научной полемики. К XVI в. период освоения знаний закончился, начался период творческого развития.

В XVI в. итальянские ученые *Н. Тарталья* (ок. 1499—1557) и *Дж. Кардано* (1501—1576) были заняты разработкой способа решения кубических уравнений в радикалах. Французский математик *Ф. Виет* (1540—1603) установил зависимости между корнями и коэффициентами уравнения.

Существенно новый период в развитии математики начался в XVII в., когда на смену постоянных величин пришел период переменных. Понятие функции стало главным предметом исследования. На первом этапе математической революции XVII в. была создана аналитическая геометрия: особенно интенсивно развивался анализ бесконечно малых величин.

Появление проективной геометрии и теории вероятностей предвещало большое будущее в их развитии. В XVIII в. дифференциальные и интегральные исчисления продвинулись далеко вперед, усилия ученых направлялись на создание новых отделов математического анализа (теории множеств и теории функций) и его приложений в механике.

12.3. Современная математика

Дальнейшее расширение и углубление предмета математики привело в начале XIX в. к современному периоду ее развития. Появление новых математических наук представляло собой длительный процесс. Работам английского ученого *И. Ньютона* (1643—1727) и немецкого ученого *Г. Лейбница* (1646—1716) предшествовали исследования ученых: нидерландского *Х. Гюгенса* (1629—1695), немецкого *И. Кеплера* (1571—1630), итальянского *Б. Кавальери* (1598—1647), французских *П. Ферма* (1601—1665), *Б. Паскаля* (1623—1662) и других, где были достаточно разработаны элементы дифференциального и интегрального исчисления. Дальнейшее развитие математического анализа продолжалось на протяжении XVIII—XIX вв. большим числом ученых (швейцарские ученые *Я. Бернулли* (1654—1705) и *И. Бернулли* (1667—1748), российский ученый *Л. Эйлер* (1707—1783), французские ученые *Ж.-Л. Лагранж* (1736—1813), *П. С. Лаплас* (1749—1827), *О. Л. Коши* (1789—1857), *Ж. Б. Ж. Фурье* (1768—1830), немецкий ученый *К. Ф. Гаусс* (1777—1855), российские ученые *М. В. Остроградский* (1801—1861), *П. Л. Чебышёв* (1821—1894) и многие другие). Методы математического анализа, и особенно дифференциальные уравнения, стали основой математического описания законов механики и физики, а также технических процессов. Под влиянием математического анализа складываются основные области в смежных дисциплинах — аналитическая механика, математическая физика и др. Важные применения в приложениях получило вариационное исчисление.

Помимо количественного роста, с конца XVIII в. — начала XIX в. в развитии математики наблюдается интерес к критическому пересмотру ряда вопросов обоснования математики. В первую очередь это касалось новых разделов математики. На смену туманных представлений о бесконечно малых величинах пришли точные формулировки, связанные с понятием предела, данные О. Л. Коши, *К. Вейерштрассом* (1815—1897). Многие факты, принимавшиеся ранее как очевидные, были строго доказаны. Это привело к появлению иррациональных чисел. В дальнейшем исследования по основаниям математического анализа привели к созданию новых областей математики — теории множеств и теории функций.

Одновременно шло углубленное изучение основных понятий и в геометрии. Крупнейшими событиями явились исследования российского ученого *Н. И. Лобачевского* (1792—1856) и венгерского ученого *Я. Больяй* (1802—1880) по неевклидовой геометрии. Дальнейшие исследования по основаниям геометрии привели к формулировке немецким ученым *Д. Гильбертом* (1862—1943) полного списка аксиом геометрии. Немецкий ученый *Г. Ф. Б. Риман* (1826—1866) создал общее понятие пространства, элементами которого могут быть объекты любой природы. Изучение наиболее общих свойств геометрических фигур и пространств привело к созданию новой области математики — топологии (Б. Риман, французский ученый *Ж. А. Пуанкаре* (1854—1912)).

В алгебре в XIX в. был выяснен вопрос о возможности решения алгебраических уравнений в радикалах. Над этой проблемой работали норвежский ученый *Н. Х. Абель* (1802—1829), французский ученый *Э. Галуа* (1811—1832). Наряду с этим детальному изучению подверглись самые общие свойства алгебраических операций, что привело к созданию в XX в. новой ветви алгебры — абстрактной, или общей алгебры. Введенные при этом в рассмотрение понятие группы, кольца, поля находят применения в самых различных областях математики и ее приложений. В XIX в. происходит новое значительное расширение области приложений математического анализа. В качестве основного аппарата возникших в XIX в. областей механики и физики усиленно развивается теория дифференциальных уравнений, в особенности дифференциальных уравнений с частными производными, которые и сейчас продолжают развиваться в связи с задачами физики и механики.

При решении многих задач приходится рассматривать не только функции действительных переменных, но и функции комплексного переменного. Теория таких функций, созданная в XIX в. О. Коши, К. Гауссом, Б. Риманом и К. Вейерштрассом, нашла применение в задачах аэро- и гидродинамики.

На почве развития анализа и математической физики в соединении с новыми идеями геометрии и алгебры возникла новая обширная область математики — функциональный анализ, играющий исключительно важную роль как в самой математике, так и в ее приложениях.

Существенными являются методы теории вероятностей. В XVII в. теория вероятностей возникла из рассмотрения некоторых задач, связанных с азартными играми. Но развитие статистической физики и статистических методов исследования различных вопросов поставило перед теорией вероятностей ряд новых задач, решение которых привело к ее бурному развитию в XIX—XX вв. (французские ученые П. Лаплас, *С. Д. Пуассон* (1781—1840), российские ученые П. Л. Чебышёв, *А. А. Марков* (1856—1922), *А. М. Ляпунов* (1857—1918), *А. Я. Хинчин* (1894—1959), *А. Н. Колмогоров* (1903—1987)).

На протяжении XIX—XX вв. продолжали развиваться, обогащаюсь новыми принципиальными идеями и результатами, и более старые области математики. Так, применение в теории чисел методов математического анализа (немецким ученым *П. Г. Л. Дирихле* (1805—1859), российским ученым *И. М. Виноградовым* (1891—1988)) позволило решить многие задачи, не поддавшиеся решению элементарными методами.

Практическое освоение результатов теоретических математических исследований требует получения ответа на поставленную задачу в числовой форме. В связи с этим в XIX—XX вв. численные методы математики вырастают в самостоятельную ее ветвь — вычислительную математику. Важные приложения к новой вычислительной технике нашла развивавшаяся в XIX—XX вв. ветвь математики — математическая логика.

Для XX в. характерен расцвет не только теоретической, но и прикладной математики. Общеизвестна ее роль в астрономии, физике, технике. В наши дни математика применяется также в экономике, экологии, социологии, психологии, лингвистике и других науках. Именно поэтому математику преподают будущим специалистам гуманитарного профиля. Она не только развивает способность к абстрактному мышлению, но позволяет глубоко проникать в суть любой области человеческой деятельности.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2792	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,31	0,1217	0,62	0,2324	0,93	0,3238
0,01	0,0040	0,32	0,1255	0,63	0,2357	0,94	0,3264
0,02	0,0080	0,33	0,1293	0,64	0,2389	0,95	0,3289
0,03	0,0120	0,34	0,1331	0,65	0,2422	0,96	0,3315
0,04	0,0160	0,35	0,1368	0,66	0,2454	0,97	0,3340
0,05	0,0199	0,36	0,1406	0,67	0,2486	0,98	0,3365
0,06	0,0239	0,37	0,1443	0,68	0,2517	0,99	0,3389
0,07	0,0279	0,38	0,1480	0,69	0,2549	1,00	0,3413
0,08	0,0319	0,39	0,1517	0,70	0,2580	1,01	0,3438
0,09	0,0359	0,40	0,1554	0,71	0,2611	1,02	0,3461
0,10	0,0398	0,41	0,1591	0,72	0,2642	1,03	0,3485
0,11	0,0438	0,42	0,1628	0,73	0,2673	1,04	0,3508
0,12	0,0478	0,43	0,1664	0,74	0,2703	1,05	0,3531
0,13	0,0517	0,44	0,1700	0,75	0,2734	1,06	0,3554
0,14	0,0557	0,45	0,1736	0,76	0,2764	1,07	0,3577
0,15	0,0596	0,46	0,1772	0,77	0,2794	1,08	0,3599
0,16	0,0636	0,47	0,1808	0,78	0,2823	1,09	0,3621
0,17	0,0675	0,48	0,1844	0,79	0,2852	1,10	0,3643
0,18	0,0714	0,49	0,1879	0,80	0,2881	1,11	0,3665
0,19	0,0753	0,50	0,1915	0,81	0,2910	1,12	0,3686
0,20	0,0793	0,51	0,1950	0,82	0,2939	1,13	0,3708
0,21	0,0832	0,52	0,1985	0,83	0,2967	1,14	0,3729
0,22	0,0871	0,53	0,2019	0,84	0,2995	1,15	0,3749
0,23	0,0910	0,54	0,2054	0,85	0,3023	1,16	0,3770
0,24	0,0948	0,55	0,2088	0,86	0,3051	1,17	0,3790
0,25	0,0987	0,56	0,2123	0,87	0,3078	1,18	0,3810
0,26	0,1026	0,57	0,2157	0,88	0,3106	1,19	0,3830
0,27	0,1064	0,58	0,2190	0,89	0,3133	1,20	0,3949
0,28	0,1103	0,59	0,2224	0,90	0,3159	1,21	0,3869
0,29	0,1141	0,60	0,2257	0,91	0,3186	1,22	0,3888
0,30	0,1179	0,61	0,2291	0,92	0,3212	1,23	0,3907

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,24	0,3925	1,58	0,4429	1,92	0,4726	2,52	0,4941
1,25	0,3944	1,59	0,4441	1,93	0,4732	2,54	0,4945
1,26	0,3962	1,60	0,4452	1,94	0,4738	2,56	0,4948
1,27	0,3980	1,61	0,4463	1,95	0,4744	2,58	0,4951
1,28	0,3997	1,62	0,4474	1,96	0,4750	2,60	0,4953
1,29	0,4015	1,63	0,4484	1,97	0,4756	2,62	0,4956
1,30	0,4032	1,64	0,4495	1,98	0,4761	2,64	0,4959
1,31	0,4049	1,65	0,4505	1,99	0,4767	2,66	0,4961
1,32	0,4066	1,66	0,4515	2,00	0,4772	2,68	0,4963
1,33	0,4082	1,67	0,4525	2,02	0,4783	2,70	0,4965
1,34	0,4099	1,68	0,4535	2,04	0,4793	2,72	0,4967
1,35	0,4115	1,69	0,4545	2,06	0,4803	2,74	0,4969
1,36	0,4131	1,70	0,4554	2,08	0,4812	2,76	0,4971
1,37	0,4147	1,71	0,4564	2,10	0,4821	2,78	0,4973
1,38	0,4162	1,72	0,4573	2,12	0,4830	2,80	0,4974
1,39	0,4177	1,73	0,4582	2,14	0,4838	2,82	0,4976
1,40	0,4192	1,74	0,4591	2,16	0,4846	2,84	0,4977
1,41	0,4207	1,75	0,4599	2,18	0,4854	2,86	0,4979
1,42	0,4222	1,76	0,4608	2,20	0,4861	2,88	0,4980
1,43	0,4236	1,77	0,4616	2,22	0,4868	2,90	0,4981
1,44	0,4251	1,78	0,4625	2,24	0,4875	2,92	0,4982
1,45	0,4265	1,79	0,4633	2,26	0,4881	2,94	0,4984
1,46	0,4279	1,80	0,4641	2,28	0,4887	2,96	0,4985
1,47	0,4292	1,81	0,4649	2,30	0,4893	2,98	0,4986
1,48	0,4306	1,82	0,4656	2,32	0,4898	3,00	0,49865
1,49	0,4319	1,83	0,4664	2,34	0,4904	3,20	0,49931
1,50	0,4332	1,84	0,4671	2,36	0,4909	3,40	0,49966
1,51	0,4345	1,85	0,4678	2,38	0,4913	3,60	0,499841
1,52	0,4357	1,86	0,4686	2,40	0,4918	3,80	0,499928
1,53	0,4370	1,87	0,4693	2,42	0,4922	4,00	0,499968
1,54	0,4382	1,88	0,4699	2,44	0,4927	4,50	0,499997
1,55	0,4394	1,89	0,4706	2,46	0,4931	5,00	0,500000
1,56	0,4406	1,90	0,4713	2,48	0,4934		
1,57	0,4418	1,91	0,4719	2,50	0,4938		

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ 0,95	γ 0,99	γ 0,999	n	γ 0,95	γ 0,99	γ 0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n	γ 0,95	γ 0,99	γ 0,999	n	γ 0,95	γ 0,99	γ 0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,221
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Таблица значений χ^2 в зависимости от p и k

k	p			k	p		
	0,05	0,01	0,001		0,05	0,01	0,001
1	3,84	6,64	10,83	16	26,3	32,0	39,3
2	5,99	9,21	13,82	17	27,6	33,4	40,8
3	7,82	11,34	16,27	18	28,9	34,8	42,3
4	9,49	13,28	18,46	19	30,1	36,2	43,8
5	11,07	15,09	20,5	20	31,4	37,6	45,3
6	12,59	16,81	22,5	21	32,7	38,9	46,8
7	14,07	18,48	24,3	22	33,9	40,3	48,3
8	15,51	20,1	26,1	23	35,2	41,6	49,7
9	16,92	21,7	27,9	24	36,4	43,0	51,2
10	18,31	23,2	29,6	25	37,7	44,3	52,6
11	19,68	24,7	31,3	26	38,9	45,6	54,1
12	21,0	26,2	32,9	27	40,1	47,0	55,5
13	22,4	27,7	34,6	28	41,3	48,3	56,9
14	23,7	29,1	36,1	29	42,6	49,6	58,3
15	25,0	30,6	37,7	30	43,8	50,9	59,7

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Некоторые постоянные

Величина	x	$\lg x$	Величина	x	$\lg x$
π	3,14159	0,49715	$\frac{1}{e}$	0,36788	$\bar{1}$,56571
2π	6,28318	0,79818	e^2	7,38906	0,86859
$\frac{\pi}{2}$	1,57080	0,19612	$\sqrt{e}$	1,64872	0,21715
$\frac{\pi}{4}$	0,78540	1,89509	$\sqrt[3]{e}$	1,39561	0,14476
$\frac{1}{\pi}$	0,31831	$\bar{1}$,50285	$M = \lg e$	0,43429	$\bar{1}$,63778
π^2	9,86960	0,99430	$\frac{1}{M} = \ln 10$	2,30258	0,36222
$\sqrt{\pi}$	1,77245	0,24857	1 радиан	57°17′45″	
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	0,16572	arc 1°	0,01745	$\bar{2}$,24188
e	2,71828	0,43429	g	9,81	0,99167

ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ

К главе 1

2. (0; 0), (10; 0), $(5; 5\sqrt{3})$. **3.** $\left(\frac{5}{2}; 0\right), \left(0; \frac{5}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}; 0\right), \left(0; -\frac{5}{2}\right)$.

4. $S = 137$ кв. ед. **6.** $A\left((\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(3\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$. **7.** A (5; 0), B $(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$, C (0; 2). **8.** A и B лежат, C не лежит. **9.** а) $y = x + 2$; б) $y = -x$; в) $y = -3$; г) $y = \frac{1}{2}x \quad 1$. **10.** а) $y = x$; б) $y = 1 - x$; в) $y = \ \frac{1}{2}x \quad 4$.
12. а) $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$; б) $-\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$; в) $-\frac{x}{2} + y = 1$. **13.** а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$. **14.** $2x - y - 1 = 0$.
15. $4x - 7y + 26 = 0$. **16.** а) (2; 1); б) $\left(0; \frac{5}{3}\right)$. **17.** $x + y = 0$.
18. $3x - 2y + 18 = 0$. **19.** $5x + 2y - 9 = 0$. **20.** $x - y + 3 = 0$ и $x + y + 3 = 0$.
21. 2; 1; 0. **22.** 5, 2. **23.** $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 17$. **24.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.
25. A и B лежат, C не лежит. **26.** $a = 5$; $b = 3$; $2c = 8$. **27.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$.
28. $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **29.** $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$. **30.** A и B лежат, C не лежит. **31.** $2a = 6$; $2b = 10$; $2c = 2\sqrt{34}$. **32.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$. **33.** $\varepsilon = 1{,}4$. **34.** $9x^2 - 16y^2 = 20$.
35. $x^2 - y^2 = 8$. **36.** а) $y^2 = 12x$; б) $x^2 = -20y$. **37.** A лежит, B не лежит.
38. а) F (4; 0); б) F (0; –5/2). **39.** $x = -1$, F (1; 0). **40.** а) $y^2 = 8x$; б) $y^2 = -12x$.
41. 1) 3 см; 2) 5 см. **42.** 1) нет; 2) да; 3) да; 4) нет. **44.** Коллинеарны.
45. $5k$. **46.** 1) (1; 8); 2) (10; 10). **47.** (–4; 0). **48.** 0. **49.** а) 26; б) –38; в) 1; г) 2695; д) –10; е) $-2b^2$. **50.** а) $x = 5$; $y = -2$; б) $x = 2$; $y = 3$; в) $x = 5$; $y = -1$.

К главе 2

1. $f(1) = \frac{1}{4}$. **3.** $f(-1) = \ \frac{1}{2}; f(0) = \ 1; f(1) = \ \frac{3}{2}; f(2) = \ 1$. **4.** $f(0) = 1; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0; f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** а) [–2; 2]; б) (–5; 5); в) [2; 5); г) [–3; 7]; д) $(-\infty; +\infty)$; е) [–1; 1]; ж) $(-\infty; +\infty)$; з) $x \neq 1$. **8.** 0. **9.** 3. **10.** –1. **11.** 3. **12.** $-\frac{1}{7}$. **13.** 2.
14. $\frac{1}{3}$. **15.** $\frac{2}{3}$. **16.** $\frac{3}{2}$. **17.** –8. **18.** $\frac{1}{2}$. **19.** $\frac{1}{3}$. **20.** $\frac{1}{3}$. **21.** $\frac{1}{2}$. **22.** 1. **23.** 1. **24.** $\frac{1}{2}$.
25. $\frac{15}{2}$. **26.** $\frac{1}{2}$. **27.** 3. **28.** $\frac{5}{2}$. **29.** $\frac{12}{5}$. **30.** $\frac{1}{16}$. **31.** –1. **32.** $\frac{3}{2}$. **33.** 0. **34.** 0.
35. ∞. **36.** $\frac{2}{3}$. **37.** e. **38.** $\frac{1}{e}$. **39.** e^4. **40.** $\frac{1}{e}$. **41.** e. **42.** 1. **43.** e^2. **44.** 2. **45.** 2.

46. 0. **47.** $\frac{1}{2}$. **48.** 2. **49.** x. **50.** $\frac{m}{n}$. **51.** $\frac{2}{\pi}$. **52.** e. **53.** 0. **54.** 0. **55.** $\frac{1}{2}$. **56.** 1. **57.** e^3. **58.** $-\sin a$. **59.** $2\cos a$. **60.** $\frac{1}{2}(n^2-m^2)$. **61.** $-2\cos a$. **62.** $\frac{1}{2}$. **63.** $-\frac{1}{4}$. **64.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **65.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **66.** $\frac{1}{4}$. **67.** $\frac{1}{2}$. **68.** $\frac{1}{2}$. **69.** 1. **70.** $\sqrt{2}$. **71.** Одного порядка: а), б); высшего порядка: в), г); низшего порядка: д). **72.** В обеих точках непрерывна. **73.** В точке $x = 1$ непрерывна. **74.** В точке $x = 3$ разрывна.

75. $17 + 17i$. **76.** $9 + 95i$. **77.** $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$. **78.** а) $-33 - 56i$, б) -1.

79. $i=\cos\frac{\pi}{2}\quad i\sin\frac{\pi}{2}$, $-2=2(\cos\pi\quad i\sin\pi)$, $-i=\cos\left(\ \frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$,

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\quad i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(\ \frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

80. а) $1;\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $1; i; -1; -i$; в) $2-3i; -2+3i$.

83. а) $\mathrm{Re}\,e^{3i}=\cos 3$, $\mathrm{Im}\,e^{3i}=\sin 3$, $|e^{3i}|\ \ 1$; б) $\mathrm{Re}\,e^{-i}=\cos 1$, $\mathrm{Im}\,e^{-i}=\ \sin 1$, $|e^{-i}|\ \ 1$.

К главе 3

1. $y'=3$. **2.** $y'=-2x$. **3.** $y'=8(4x\quad 1)$. **4.** $y'=x^2$. **5.** $y'=\frac{1}{(x-3)^2}$. **6.** $y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **7.** $y'=-6x^2$. **8.** $y'=\frac{2}{x^2}$. **9.** $y'=\frac{6x}{(x^2-1)^2}$. **10.** $y'=\frac{2}{x^3}$. **11.** $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\quad\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$. **12.** $y'=x^2\quad\frac{9}{x^4}$. **13.** $y'=\frac{2}{5}$. **14.** $y'=6x^2\quad 2x$.– **15.** $y'=20x^4-15x^2+24x$. **16.** $y'=(x\quad 5)^3(x\quad 3)^4(9x\quad 13)$. **17.** $y'=\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$. **18.** $y'=\frac{x^4-15x^2+6x}{(5-x^2)^2}$. **19.** $y'=\frac{5(5+4x)}{(5-2x)^4}$.

20. $y'=\frac{(3x^2+5)^2(30x^2-54x-10)}{(2x-3)^2}$. **21.** $y'=\frac{30x^2}{(x^3+5)^6}$. **22.** $y'=\frac{4x}{\sqrt[3]{(6x^2-5)^2}}$. **23.** $x=-\sqrt{2}$. **24.** $y'=\frac{5x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$. **25.** $y'=\frac{5}{2(x+3)\sqrt{x^2+x-6}}$.

26. $y'=3\sin^2 x\cos x$. **27.** $y'=2x\cos x^2$. **28.** $y'=\frac{\sin x}{2}$. **29.** $y'=\frac{3}{2}x^2\sin\frac{x^3}{2}$. **30.** $y'=x(2\cos x\quad x\sin x)$. **31.** $y'=\frac{5\cos x-\cos 5x}{2\cos^2 3x}$. **32.** $y'=x^2\cos x$. **33.** $y'=\frac{1}{1-\sin x}$. **34.** $y'=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$. **35.** $y'=\frac{8x\,\mathrm{tg}^3(x^2+1)}{\cos^2(x^2+1)}$. **36.** $y'=\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$. **37.** $y'=-\mathrm{tg}^2 x$. **38.** $y'=\frac{4x-\sin 2x}{4x\sqrt{x}\cos^2 x}$. **39.** $y'=\frac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$. **40.** $y'=\frac{2\ln x}{x}$. **41.** $y'=\frac{2}{x}\quad\frac{\ln x}{x^2}\quad\frac{2}{x^2}$. **42.** $y'=\frac{1}{\sin x}$. **43.** $y'=\frac{2}{x}$. **44.** $y'=xe^x$. **45.** $y'=\frac{x^2}{2}e^{\frac{x}{2}}$. **46.** $y'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. **47.** $y'=e^{x\ln x}(1\quad\ln x)$. **48.** $y'=(2x\quad x^2\ln 2)2^x$. **49.** $y'=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

50. $y' = 2\mathrm{tg}^2 2x(3\quad 2\sin^2 2x)$. **51.** $y' = \dfrac{x}{1+x}$. **52.** $y' = \dfrac{24x^2}{(x^3-9)(x^3-1)}$.

53. $y' = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. **54.** $y' = \sqrt{1\quad x^2}$. **55.** $y' = \dfrac{1}{1-x^4}$. **56.** $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2}\mathrm{ctg}\dfrac{2x+4}{x+1}$.

57. $y' = \dfrac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$. **58.** $y' = \dfrac{1}{1+e^x}$. **59.** $y' = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$. **60.** $y' = \dfrac{2a^3}{x^4-a^4}$.

61. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. **62.** $y' = x\,\mathrm{arctg}\,x$. **63.** $y' = 4^{\mathrm{arctg}\sqrt{x^2+1}}\ln 4\cdot\dfrac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}$.

64. $y' = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}}$. **65.** Касательная $y = 4x\quad 4$. **66.** Касательная $y = \pi - x$. **67.** $k = 12$. **68.** Нормаль $4x + y - 36 = 0$. **69.** Нормаль $4x + 3y = 0$. **70.** 8 м/с. **71.** $v = 0$ при $t = 1$ с. **72.** $v = \dfrac{p}{a}$. **73.** $dy = \quad 4x(a^2\quad x^2)dx$.

74. $dy = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}}$. **75.** $dy = \dfrac{dx}{1-x^2}$. **76.** $dy = \sec^4 x\,dx$. **77.** $dy = \dfrac{2x\,dx}{1+x^4}$.

78. $dy = (24x^2\quad 4x\quad 15)dx$. **79.** $dy = \dfrac{17dx}{(2x+3)^2}$. **80.** $dy = (2xe^{x^2}\quad 1)dx$.

81. $dy = 8^x\ln 8\,dx$. **82.** $dy = \quad\dfrac{1}{2}\sin x\,dx$. **83.** $dy = 2\cos(2x\quad 3)dx$.

84. $\sqrt[3]{1{,}1} \approx 1{,}033$. **85.** $\sqrt[5]{1{,}02} \approx 1{,}004$. **86.** $\sqrt[3]{26{,}19} \approx 2{,}97$. **87.** $\sin 31^\circ \approx 0{,}515$. **88.** $\ln 1{,}007 \approx 0{,}007$. **89.** $\cos 61^\circ \approx 0{,}4849$. **90.** $y'' = 20x^3\quad 36x^2\quad 6x\quad 10$.

91. $y''' = 12$. **92.** $y^{\mathrm{V}} = 0$. **93.** $y'' = \dfrac{1}{x}$. **94.** $y''' = 8e^{2x}$. **95.** $y^{\mathrm{IV}} = e^x$.

96. $y'' = e^{\cos x}(\sin^2 x - \cos x)$. **97.** $y'' = -4\sin 2x$. **98.** $y'' = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. **99.** $\dfrac{1}{2}$.

100. -3. **101.** $\dfrac{1}{2}$. **102.** 1. **103.** 0. **104.** 0. **105.** 0. **106.** $\dfrac{1}{6}$. **107.** 0. **108.** 1.

109. $-\dfrac{3}{5}$. **110.** $\dfrac{1}{n}$. **111.** $\dfrac{a^2}{b^2}$. **112.** $-\dfrac{1}{2}$. **113.** Убывает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ и возрастает на $(-1; 1)$. **114.** Убывает на $(-\infty; 2)$ и возрастает на $(2; +\infty)$. **115.** Убывает на $(-1; 1)$ и возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$. **116.** Убывает на $(-1; 0)$ и $(0; 1)$ и возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$. **117.** Возрастает на $(-\infty; +\infty)$. **118.** Минимум при $x = 0$. **119.** Максимум при $x = 1$. **120.** Минимум при $x = 5$; максимум при $x = 1$. **121.** Минимум при $x = \dfrac{1}{e}$. **122.** Минимум при $x = -2$; максимум при $x = 2$. **123.** [Минимум при $x = -1$ и $x = 3$; максимум при $x = 0$. **124.** -13 и 3. **125.** $-\dfrac{7}{3}$ и 3. **126.** $-\dfrac{4}{3}$ и -1.

127. $\dfrac{\pi-4}{4}$ и $\dfrac{4-\pi}{4}$. **128.** 0,5. **129.** $-0{,}5$. **130.** Радиус полукруга должен быть равен высоте прямоугольника $R = H\quad\dfrac{2p}{4+\pi}$. **131.** $H = \dfrac{l\sqrt{3}}{3}$. **132.** $t = 3$ с; $v = 45$ м/с. **133.** Точка перегиба $(0; 0)$; выпукла на $(-\infty; 0)$ и вогнута на $(0; +\infty)$. **134.** Точка перегиба $(1; 0)$; выпукла на $(1; +\infty)$ и вогнута на $(-\infty; 1)$. **135.** Точка перегиба $(5; 5)$; выпукла на $(5; +\infty)$ и вогнута на $(-\infty; 5)$. **136.** $x = 0$ и $y = 1$. **137.** $x = 0$ и $y = x$. **138.** $x = -1$ и $y = x - 1$.
139. Область определения: $-\infty < x < +\infty$; функция не является ни четной, ни нечетной; график проходит через начало координат и, кроме того, пересекает ось абсцисс еще в точке $(3; 0)$; убывает на $(1; 3)$, возрастает на

(−∞; 1) и (3; + ∞); при $x = 1$ максимум, $y_{\max} = 8$, при $x = 3$ минимум, $y_{\min} = 0$; выпукла на (−∞; 2) и вогнута на (2; + ∞); $x = 2$ — абсцисса точки перегиба графика; асимптот нет. **140.** Область определения: $-\infty < x < +\infty$; функция нечетная; график проходит через начало координат; убывает на (−∞; −4) и (4; +∞), возрастает на (−4; 4), при $x = 4$ максимум, $y_{\max} = \frac{1}{8}$, при $x = -4$ минимум, $y_{\min} = -\frac{1}{8}$; выпукла на $(-\infty; -4\sqrt{3})$ и $(0; 4\sqrt{3})$, вогнута на $(4\sqrt{3}; +\infty)$ и $(-4\sqrt{3}; 0)$; $x = 4\sqrt{3}, x \quad 0$ и $x = 4\sqrt{3}$ — абсциссы точек перегиба графика; $y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \to +\infty (x \to -\infty)$. **141.** Область определения: $-\infty < x < +\infty$; функция четная, положительна на всей числовой оси, график не пересекает ось абсцисс и пересекает ось ординат в точке (0; 1); убывает на (0; + ∞), возрастает на (−∞; 0); при $x = 0$ максимум, $y_{\max} = 1$; выпукла на $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ и вогнута на $(-\infty; -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}; +\infty)$; $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$ — абсциссы точек перегиба графика; $y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

К главе 4

1. $\frac{x^7}{7} + C$. **2.** $\frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$. **3.** $-\frac{1}{4x^4} + C$. **4.** $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C$.
5. $4x + \frac{8}{3} x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$. **6.** $2\ln|x| + x + C$. **7.** $\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + C$. **8.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C$.
9. $\arcsin\frac{x}{5} + C$. **10.** $-\frac{1}{7}\cos 7x + C$. **11.** $\frac{3^x}{\ln 3} + C$. **12.** $e^x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$.
13. $\ln|x + \sqrt{x^2 - 5}| + C$. **14.** $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + C$. **15.** $\frac{1}{3}\sin 3x + C$. **16.** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C$.
17. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x + C$. **18.** $e^{x+x^2} + C$. **19.** $-\frac{1}{2}\cos x^2 + C$. **20.** $-\frac{1}{24}\cos^6 4x + C$.
21. $-\ln(1 + e^{-x}) + C$. **22.** $e^{x^3+x^2-x+1} + C$. **23.** $-\frac{1}{3}(4 - \ln x)^3 + C$.
24. $-\ln|\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}| + C$. **25.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg} x^3 + C$. **26.** $-\frac{1}{x-1} + C$.
27. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$. **28.** $\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$. **29.** $-\frac{1}{8}\cos 4x + C$.
30. $\frac{3}{26}\sin\frac{13}{3}x + \frac{3}{10}\sin\frac{5}{3}x + C$. **31.** $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C$.
32. $\frac{13 - 6x}{9}e^{-3x} + C$. **33.** $\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$. **34.** $-\frac{2x+1}{4}e^{-2x} + C$.
35. $(6 - 4x)\cos\frac{x}{2} + 8\sin\frac{x}{2} + C$. **36.** $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$.
37. $x\arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4x^2} + C$. **38.** $x\operatorname{arcctg} 3x + \frac{1}{6}\ln(1 + 9x^2) + C$.
39. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$. **40.** $e^x(x^2 - 2x + 3) + C$. **41.** $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$.
42. $4\frac{2}{3}$. **43.** $\ln 2$. **44.** $\frac{e^2 - 1}{2}$. **45.** 0. **46.** 1. **47.** 1. **48.** $\frac{\pi}{6}$. **49.** $\frac{\pi}{3}$. **50.** 1.
51. $\ln(1 + e)$. **52.** $1\frac{1}{3}$. **53.** $\frac{1}{4}$. **54.** $64\frac{2}{3}$. **55.** 0,5. **56.** $\frac{\pi}{2}$. **57.** e^{-2}. **58.** 8.

59. $\frac{2e^3+1}{9}$. **60.** $\frac{5e^{-6}+7}{9}$. **61.** $\frac{1}{3}$. **62.** $\frac{\pi}{6}$. **63.** $\frac{1}{5}$. **64.** Расходится. **65.** $\frac{1}{2}$.
66. $-\frac{\pi^2}{8}$. **67.** Сходится. **68.** Сходится. **69.** Расходится. **70.** 24. **71.** 1.
72. 4π. **73.** $\frac{4}{3}\pi^3a^2$. **74.** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. **75.** $8a$. **76.** $\frac{\pi}{8}(e^2-e^{-2})+\frac{\pi}{2}$. **77.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$.
78. $\frac{\pi^2}{2}$.

К главе 5

1. Вся плоскость xOy. **2.** Вся плоскость xOy, кроме точки (0; 0).
3. Квадранты I и III: $x > 0$, $y > 0$ и $x < 0$, $y < 0$. **4.** Полоса $-1 \le x + y \le 1$.
5. Полуплоскость $x + y > 0$. **6.** Круг $x^2 + y^2 < 4$. **7.** Круг $x^2 + y^2 \le 1$.
8. Вся плоскость xOy, кроме прямой $y = x$. **9.** Вся плоскость xOy, кроме осей Ox и Oy. **10.** Квадрант I: $x > 0$, $y > 0$. **11.** Квадрант I: $x > 0$, $y > 0$.
12. $u'_x = 3x^2 \quad 6xy$, $u'_y = 3x^2 \quad 3y^2$. **13.** $u'_x = 3x^2 \quad 6xy$, $u'_y = 3x^2 \quad 2y$.
14. $u'_x = \frac{1}{2\sqrt{x+3y}}$, $u'_y = \frac{3}{2\sqrt{x+3y}}$. **15.** $u'_x = \ \frac{y}{x^2+y^2}$, $u'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$.
16. $u'_x = \frac{2}{1+(2x-y)^2}$, $u'_x = \frac{2}{1+(2x-y)^2}$. **17.** $u'_x = \ y^2(1 \quad x)^{y^2-1}$,
$u'_y = 2y(1 \quad x)^{y^2}\ln(1 \quad x)$. **18.** $u'_x = \frac{y^2u}{1+xy}$, $u'_y = u\left(\ln(1 \quad xy) \quad \frac{xy}{1+xy}\right)$.
19. $u'_x = 3x^2y^2 \quad 2\ln y \quad yx^{y-1}$, $u'_y = 2x^3y \quad \frac{2x}{y} \quad x^y\ln x$. **20.** $u'_x = 3x^2\sin y$,
$u'_y = x^3\cos y \quad 4y^3$. **21.** $u'_x = 6x^5$, $u'_y = \ 4y^3$. **22.** В точке $A(2;\ 1)$ $u'_x = \ 2$,
$u'_y = 4$. **23.** В точке $A(0;\ 1)$ $u'_x = \ 2$, $u'_y = 0$. **24.** В точке $B(1;\ 1)$ $u'_x = \frac{2}{3}$, $u'_y = \frac{3}{2}$.
25. $du = \frac{37(-ydx+xdy)}{(9x-2y)^2}$. **26.** $du = \frac{3dx+2dy}{3x+2y}$.
27. $du = e^{2x}(2\sin 3y dx + 3\cos 3y dy)$. **28.** $du = e^{-xy}[(1-xy)dx - x^2dy]$.
29. $du = (2x \quad 3y)dx \quad 3xdy$. **30.** $du = \frac{1}{y}dx \quad \frac{x}{y^2}dy$. **31.** $du = \frac{dx}{x} \quad \frac{dy}{y}$.
32. $du = (2x \quad y^2)dx \quad (2xy \quad \cos y)dy$. **33.** $\frac{du}{dt} = e^x\left(y\frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt}\right)$. $+$
34. $\frac{du}{dt} = \frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dt} \quad \frac{dx}{dt}\right)\sin\frac{x}{y}$. **35.** $\frac{du}{dt} = \frac{2}{4+x^2+y^2}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$.
36. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{y}{x}e^{\frac{y^2}{x}}\left(\ \frac{y}{x}\frac{\partial x}{\partial t} \quad 2\frac{\partial y}{\partial t}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{y}{x}e^{\frac{y^2}{x}}\left(\ \frac{y}{x}\frac{\partial x}{\partial \tau} \quad 2\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)$.
37. $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{tg} y\frac{\partial x}{\partial t} \quad \frac{x}{\cos^2 y}\frac{\partial y}{\partial t} \quad = \frac{1}{\cos y}\left(\sin y\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{x}{\cos y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)$,
$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\cos y}\left(\sin y\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{x}{\cos y}\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)$. **38.** а) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x^2}{y^2-x}$; б) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-xy}$;
в) $\frac{dy}{dx} = \ \frac{ye^x}{e^x+e^y}$. **39.** а) $u''_{x^2} = 6x \quad 8y$, $u''_{xy} = \ 8x$, $u''_{y^2} = 10$; б) $u''_{x^2} = e^x\ln y$,

$u''_{xy}=\dfrac{e^x}{y}$, $u''_{y^2}=\dfrac{e^x}{y^2}$. **40.** $u''_{x^2}=u''_{xy}=u''_{y^2}=\sin(x\quad y)$. **41.** $u''_{x^2}=0$, $u''_{xy}=\dfrac{1}{1+y^2}$, $u''_{y^2}=\dfrac{2xy}{(1+y^2)^2}$. **42.** $u''_{x^2}=\dfrac{y}{x^3}e^{-\frac{y}{x}}\left(\dfrac{y}{x}\quad 2\right)$, $u''_{xy}=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{y}{x}}\left(1\quad \dfrac{y}{x}\right)$, $u''_{y^2}=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{y}{x}}$.
43. Первые два выражения являются полными дифференциалами, третье — нет. **44.** $2(dx^2+dy^2)$. **45.** $2dxdy$. **46.** $2\sin 2y\,dxdy+2x\cos 2y\,dy^2$.
47. $e^{x+y^2}(dx^2+4ydxdy+(2+4y^2)dy^2)$. **48.** $u_{\min}=422{,}25$ в точке $\left(\dfrac{17}{2};-\dfrac{11}{2}\right)$.
49. В точке (–6; 0) функция имеет максимум ($u_{\max}$ = 864), в точке (6; 0) — минимум ($u_{\min}$ = –864). В точках $(0; 6\sqrt{6})$ и $(0; -6\sqrt{6})$ функция не имеет экстремума. **50.** $u_{\min}$ = –7 в точке (1; 2). **51.** Экстремума нет. **52.** Куб.
53. $x=y\quad\sqrt[3]{2V}$, $H=\dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$, где x и y — размеры дна и H — высота.
54. $a\approx 5{,}4$; $b\approx -2{,}9$.

К главе 6

1. 2. **2.** $\frac{3}{4}$. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** $\frac{11}{18}$. **6.** Расходится. **7.** Расходится. **8.** Расходится. **9.** Расходится. **10.** Сходится. **11.** Расходится. **12.** Расходится. **13.** Расходится. **14.** Сходится. **15.** Сходится. **16.** Сходится. **17.** Сходится. **18.** Сходится. **19.** Сходится. **20.** Сходится. **21.** Сходится. **22.** Расходится. **23.** Условно сходится. **24.** Абсолютно сходится. **25.** Расходится. **26.** Условно сходится. **27.** Расходится. **28.** Абсолютно сходится. **29.** $|x|<1$; при $x=1$ условно сходится. **30.** $|x|<1$. **31.** $|x|<e$. **32.** $|x|<7$; при $x=-7$ условно сходится. **33.** $-\infty<x<+\infty$. **34.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n!}$, $|x|<+\infty$. **35.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n x^{n+2}}{n!}$, $|x|<+\infty$. **36.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!}$, $|x|<+\infty$. **37.** $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$, $|x|<+\infty$.
38. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}$, $|x|<1$. **39.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$. **40.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, $|x|<1$.
41. $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$, $|x|<1$. **42.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)}$, $|x|\le 2$. **43.** 1,649.
44. 0,309. **45.** 0,747.

К главе 7

1. $(1+y)(1-x)=C$. **2.** $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=C$. **3.** $\dfrac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+C$.
4. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$. **5.** $e^x=C(1\quad e^{-y})$. **6.** $2^x+2^{-y}=C$.
7. $1+e^y=C(1+x^2)$. **8.** $x^2-y^2-Cx=0$. **9.** $y=\dfrac{x}{2}\quad\dfrac{C}{x}$.
10. $x^3+3x^2y-y=C$. **11.** $x^2-2xy+2y^2=C$. **12.** $y=(x^2+C)e^{-x^2}$.
13. $y=Ce^{-2x}\quad e^{-x}$. **14.** $y=x\quad x^2$. **15.** $y=1$. **16.** $y=x^2$. **17.** 162 см.
18. 9 см. **19.** $y=\dfrac{x^3}{6}+C_1x+C_2$. **20.** $y=\sin x\quad\cos x\quad C_1x\quad C_2$.
21. $y=e^x+C_1x+C_2$. **22.** $y=C_1e^x\quad C_2e^{-x}$. **23.** $y=-x^3$. **24.** $s(t)=2t^2$.

25. $s=t^3/3$. **26.** $s=t^4+1$. **27.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$. **28.** $y=e^{-12x}(C_1+C_2x)$.
29. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$. **30.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}$. **31.** $y=C_1e^{-\sqrt{5}x}+C_2e^{\sqrt{5}x}$.
32. $y=e^{11x}(C_1+C_2x)$. **33.** $y=e^{2x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$.
34. $y=C_1+C_2e^{-15x}$. **35.** $y=C_1\cos 7x+C_2\sin 7x$. **36.** $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{x}{2}$.
37. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{9}x+\frac{2}{9}$. **38.** $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}e^{x}$.
39. $y=e^{4x}(C_1+x)+C_2$. **40.** $y=C_1+C_2e^{x}-\frac{1}{2}x^2-5x$.
41. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{24}\sin 5x$. **42.** $y=C_1\cos x+\left(C_2+\frac{x}{2}\right)\sin x$.

К главе 8

1. 0,05. **2.** 0,5. **3.** 0,81. **4.** 0,02. **5.** 0,05. **6.** 0,005. **7.** 0,7. **8.** 0,96. **9.** $\frac{1}{3}$. **10.** 0,5. **11.** 0,2. **12.** 0,6. **13.** $\frac{3}{35}$. **14.** 0,1. **15.** $\frac{1}{105}$. **16.** 0,56. **17.** 0,25. **18.** 0,56. **19.** а) 0,25; б) 0,5. **20.** 0,91. **21.** $\frac{1}{3}$. **22.** $\frac{2}{3}$. **23.** 0,85. **24.** 0,9. **25.** $P(A)=0{,}2$. **26.** $\frac{15}{28}$. **27.** $\frac{1}{6}$. **28.** $\frac{1}{840}$.

К главе 9

1.

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2.

X	0	100	5000
p	0,89	0,1	0,01

3. 2,2. **4.** 60 р. **5.** 3,9. **6.** 0,7 попаданий. **7.** 7. **8.** 12,25. **9.** 32,56. **10.** 2,01. **11.** 7. **12.** а) 5; б) 20; в) 45. **13.** $M(X)=0{,}1$ и $D(X)=1{,}29$. **14.** $M(X)=4{,}7$ и $D(X)=3{,}01$. **15.** $M(X)=8$ и $D(X)=8$. **16.** а) Прибавится a; б) не изменится. **17.** а) Умножится на a; б) умножится на a^2. **18.** $D(X)=1$, $\sigma(X)=1$. **19.** 2,5. **20.** $M(X)=11$; $D(X)=33$; $\sigma(X)\approx 5{,}75$. **21.** $\nu_1=4{,}6$; $\nu_2=21{,}8$. **22.** $\mu_2=0{,}64$. **23.** $\frac{1}{3}$. **24.** 0,5. **25.** $\frac{27}{32}$. **26.** 0,5. **27.** $a=0{,}5$.

28. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \sin x & \text{при } 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ 1 & \text{при } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ **29.** $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 1-\cos x & \text{при } 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ 1 & \text{при } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

30. $A=\frac{1}{\pi}$, $F(x)=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} e^{x}$. **31.** $M(X)=2$. **32.** $M(X)=\frac{1}{2}$, $D(X)=\frac{1}{12}$. **33.** $\frac{27}{64}$.

34. $\frac{80}{243}$. **35.** $\frac{80}{243}$. **36.** $\frac{13}{16}$. **37.** а) 0,384; б) 0,896. **38.** 0,31.

39.

X	0	1	2	3
p	0,008	0,096	0,384	0,512

40. 0,375. **41.** 6 попаданий. **42.** 6 билетов. **43.** 21. **44.** а) 100 изделий; б) 98. **45.** 2,4. **46.** 0,48. **47.** $f(x)=\frac{1}{5{,}5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-164)^2}{60{,}5}}$. **48.** 0,77453. **49.** 0,6826. **50.** 0,9759. **51.** 2,47; 2,53. **52.** 0,5468. **53.** 0,03988. **54.** 0,954. **55.** 1,05.

К главе 10

3. $\bar{x}_г = 1240$, $D_г = 14\,400$. **4.** а) 9,67 мм; б) 7,1 см. **5.** $\bar{x}_в = 8{,}4$; $D_в = 9{,}84$. **6.** $s^2 \approx 5{,}1$. **7.** $3{,}12 < \bar{x}_г < 5{,}08$. **8.** $4{,}16 < \bar{x}_г < 6{,}64$. **9.** $18{,}57 < \bar{x}_г < 21{,}67$. **10.** $19{,}774 < \bar{x}_г < 20{,}626$. **11.** $15{,}85 < \bar{x}_г < 17{,}75$. **12.** $11{,}512 < \bar{x}_г < 16{,}888$. **13.** $38{,}469 < a < 46{,}169$. **14.** $0{,}03 < \sigma < 0{,}21$. **15.** $22{,}948 < a < 23{,}374$; $0{,}224 < \sigma < 0{,}576$. **16.** $\chi_0^2 = 2{,}5$; $\chi^2(0{,}05; 4) = 9{,}5$. Нет оснований отвергнуть гипотезу. **17.** $\chi_0^2 = 13$; $\chi^2(0{,}05; 4) = 9{,}5$. Гипотеза отвергается. **18.** $y = 0{,}0098x + 0{,}2581$. **19.** $x = 64y - 7{,}012$.

К главе 11

1. а) Равны; б) равны; в) не равны. **2.** а) $\{5; 6\} \subset \{5; 6; 8\}$; б) $5 \in \{5; 6; 8\}$; в) $2 \in N$. **3.** б) пустое множество; г) пустое множество. **4.** $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$; $A \cap B = \{3; 4; 5; 6\}$. **5.** $A \cup B = N$; $A \cap B = \varnothing$. **6.** $S = \{1; 2\}$. **7.** $A \backslash B = N \backslash B = \{1; 3; 5; ...\}$. **8.** $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}, \{1; 2; 3\}, \varnothing$. **9.** а) C; б) $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$; в) C; г) A; д) C. **12.** 6 840. **13.** 360. **14.** 6. **15.** 15. **16.** Высказывания 1 и 2 — истинные, 3 и 5 — ложные. Предложения 4, 6, 7, 8 не являются высказываниями. **17.** Высказывания 4 и 6 — простые, а 1, 2, 3 и 5 — составные. В высказываниях 1, 2, 3 и 5 грамматические связки соответственно «не», «и», «если ..., то», «или». **18.** 1) Число 35 делится на число 7; 2) $6 \leq 3$; 3) $4 > 7$; 4) Кислород — не газ. **19.** x — «сегодня понедельник», y — «сегодня вторник», z — «идет дождь», v — «идет снег», w — «крыши мокрые». 1) $x \nabla y$, 2) $z \vee v$, 3) $z \to w$. **20.** 1) Я не учусь в школе. 2) Неверно, что я не учусь в школе. 3) Я учусь в школе и люблю биологию. 4) Я учусь в школе и не люблю биологию. 5) Я не учусь в школе и люблю биологию. 6) Я не учусь в школе и не люблю биологию. 7) Неверно, что я учусь в школе и люблю биологию.
21. 1) Студент Петров не изучает немецкий язык и успевает по дискретной математике. 2) Если студент Петров изучает немецкий язык, то он успевает по дискретной математике. 3) Студент Петров не успевает по дискретной математике тогда и только тогда, когда он не изучает немецкий язык.

22.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
1	1	0	0	0

23.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \wedge \bar{y}$	$(x \wedge \bar{y}$	$(x \wedge \bar{y}) \to (\bar{x} \vee y)$
0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1

24.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \wedge \bar{y}$	$(x \wedge \bar{y}) \vee z$
0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

27. $(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \wedge y) \wedge y = y.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артемьева Е.Ю.* Вероятностные методы в психологии / Е.Ю.Артемьева, Е.М.Мартынов. — М. : Изд-во МГУ, 1975.

2. *Баврин И.И.* Курс высшей математики / И.И.Баврин. — М. : Гуманит. изд. центр. «Владос», 2004.

3. *Бейли Н.* Математика в биологии и медицине / Н.Бейли. — М. : Мир, 1970.

4. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей / Б.В.Гнеденко. — М. : Наука, 1988.

5. *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии / Н.В.Ефимов. — М. : Наука, 1975.

6. *Ильин В.А.* Основы математического анализа / В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. — М. : Наука, 1971. — Ч. 1.

7. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ / Л.Д.Кудрявцев. — М. : Высш. шк., 1981. — Т. I, II.

8. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры / А.Г.Курош. — М. : Физматгиз, 1962.

9. *Михеев В.И.* Моделирование и методы теории измерений в педагогике / В.И.Михеев. — М. : Высш. шк., 1987.

10. *Никольский С.М.* Курс математического анализа / С.М.Никольский. — М. : Наука, 1983. — Т. I.

11. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С.Понтрягин. — М. : Наука, 1974.

12. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И.Привалов. — М. : Наука, 1977.

13. *Садовский Л.Е.* Математика и спорт / Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — (Библиотечка «Квант». — Вып. 44).

14. *Суходольский Г.В.* Основы математической статистики для психологов / Г.В.Суходольский. — Изд-во Ленинградского университета, 1972.

15. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В.Феллер. — М. : Мир, 1984. — Т. I.

16. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику / С.В.Яблонский. — М. : Наука, 1986.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Баврин Иван Иванович

Математика
для гуманитариев

Учебник

Редактор *Н. В. Менщикова*
Технический редактор *Н. И. Горбачева*
Компьютерная верстка: *Д. В. Федотов*
Корректоры *Н. В. Савельева*, *Т. Н. Чеснокова*

Изд. № 101115875. Подписано в печать 28.06.2011. Формат 60 × 90/16.
Гарнитура «Ньютон». Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,0.
Тираж 1500 экз. Заказ №

ООО «Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
125252, Москва, ул. Зорге, д. 15, корп. 1, пом. 26б.
Адрес для корреспонденции: 129085, Москва, пр-т Мира, 101В, стр. 1, а/я 48.
Тел./факс: (495) 648-0507, 616-00-29.
Санитарно-эпидемиологическое заключение № РОСС RU. AE51. Н 14964 от 21.12.2010.

Отпечатано с электронных носителей издательства.
ОАО «Тверской полиграфический комбинат», 170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.
Телефон: (4822) 44-52-03, 44-50-34. Телефон/факс: (4822) 44-42-15.
Home page — www.tverpk.ru Электронная почта (E-mail) — sales@tverpk.ru